УДК 539.3
doi: 10.33622/0869-7019.2023.11.86-90

Подходы и принципы математического моделирования в строительной механике

Борис Владимирович ГУСЕВ[1], доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РАН, info-rae@mail.ru

Василий Васильевич САУРИН[2], доктор физико-математических наук, профессор, ведущий сотрудник, saurin@ipmnet.ru

[1] Российский университет транспорта (МИИТ), 127994 Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9

[2] Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, 119526 Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1

Аннотация. *Обсуждаются некоторые подходы и принципы математического моделирования в строительной механике. При описании явлений, происходящих в механике сплошных сред, используются двойственные вариационные принципы. Переменные всегда можно разделить на две группы. Первая группа состоит из так называемых измеряемых переменных, вторая — из неизмеряемых величин. В то же время управляющие уравнения можно разделить на три группы: уравнения состояния, законы баланса и непрерывности, начальные и граничные условия. Показано, каким образом начально-краевая задача может быть сведена к минимизации квадратического неотрицательного (энергетического) функционала относительно всех допустимых переменных. Суть этого функционала в том, что он состоит из шести состояний энергий. Сформулирован энергетический принцип, определяющий истинное состояние системы. Такой подход также позволяет естественным образом сформулировать критерии точности приближенных решений и построить решения для сложных нестационарных динамических систем с нерегулярной формой с наперед заданной точностью.*

Ключевые слова: *строительная механика, математическое моделирование, вариационные принципы, численные методы, линейная теория упругости*

Для цитирования: *Гусев Б. В., Саурин В. В.* Подходы и принципы математического моделирования в строительной механике // Промышленное и гражданское строительство. 2023. № 11. С. 86—90. doi: 10.33622/0869-7019.2023.11.86-90

APPROACHES AND PRINCIPLES OF MATHEMATICAL MODELING IN STRUCTURAL MECHANICS

Boris V. GUSEV[1], info-rae@mail.ru

Vasiliy V. SAURIN[2], saurin@ipmnet.ru

[1] Russian University of Transport, ul. Obraztsova, 9, str. 9, Moscow 127994, Russian Federation

[2] Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, prospekt Vernadskogo, 101, korp. 1, Moscow 119526, Russian Federation

Abstract. *Some approaches and principles of mathematical modeling in the structural mechanics are discussed. When describing phenomena occurring in the mechanics of solids, dual variational principles are used. Variables can always be divided into two groups: the first group consists of so-called measurable variables, the second contains non-measurable quantities. At the same time, the governing equations can be divided into three groups: constitutive equations, laws of balance and continuity, initial and boundary conditions. It is shown how the initial-boundary value problem can be reduced to minimizing a quadratic non-negative (energy) functional with respect to all admissible variables. The essence of this functional is that it consists of six energy states. An energy principle is formulated that determines the true state of the system. This approach also allows us to naturally formulate criteria for the accuracy of approximate solutions and construct solutions for complex non-stationary dynamic systems with an irregular shape with a predetermined accuracy.*

Keywords: *structural mechanics, mathematical modeling, variational principles, numerical methods, linear theory of elasticity*

For citation: Gusev B. V., Saurin V. V. Approaches and principles of mathematical modeling in structural mechanics. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2023, no. 11, pp. 86—90. (In Russ.). doi: 10.33622/0869-7019.2023.11.86-90

Введение

Одним из принципиальных направлений математического моделирования является использование идей двойственности в описании физических процессов. Можно отметить, что идеи двойственности широко применяются в науке. В частности, при описании свойств света используются как волновые, так и корпускулярные представления. При опи-

© ГУСЕВ Б. В., САУРИН В. В., 2023

сании явлений, происходящих в механике сплошных сред, применяются двойственные вариационные принципы, одни из которых записываются в перемещениях, а другие в напряжениях [1, 2].

В уравнениях математической физики переменные всегда можно разделить на две группы — измеряемые и неизмеряемые. При этом управляющие уравнения можно разделить на три типа: уравнения состояния, связывающие измеряемые и неизмеряемые неизвестные; законы баланса и непрерывности; начальные и граничные условия.

Уравнения первого типа содержат информацию о внутренних свойствах исследуемого объекта; второго типа — описывают фундаментальные физические явления; третьего — отражают влияние среды на рассматриваемую систему.

В вычислительной физике предполагается, что некоторые определяющие соотношения ослабляются. Например, в линейной теории упругости принцип минимальной потенциальной энергии отражает равновесное состояние тела. Другой подход состоит в том, что только уравнения первого типа рассматриваются в интегральной квадратичной форме, тогда как другие уравнения должны быть точно выполнены (см. например [3, 4]).

Начально-краевая задача, измененная в соответствии с этим подходом, может быть, например, сведена к минимизации квадратического неотрицательного (энергетического) функционала относительно всех допустимых переменных. Такой подход также позволяет естественным образом сформулировать критерии точности приближенных решений и строить решения для сложных нестационарных динамических систем с нерегулярной формой с наперед заданной точностью.

Математическое моделирование

Основная задача математической физики — разработка специальных моделей изучения различных явлений природы. Фундаментальные законы природы, например закон сохранения энергии, импульсов, массы заряда и т. д., — базис построения математических моделей. Данная общность приводит к тому, что методы математической физики могут быть применены к описанию явлений в таких областях, как химия, геология, биология, экология, экономика и т. д.

Методы математического моделирования широко применяются также в инженерии для описания различных систем и устройств. Современные математические модели являются надежной заменой исследуемого объекта его математическим описанием. Это позволяет провести детальный анализ рассматриваемого явления с помощью вычислительной техники.

Как правило, задачи математической физики тесно связаны с изучением процессов в системах с распределенными параметрами. Такие системы обычно занимают некоторую область пространства. Переменные, определяющие состояние среды и ее поведение, зависят от пространственных координат и времени. Развитие математического описания таких явлений было обусловлено в первую очередь достижениями в механике и электродинамике.

Одна из основных идей состоит в том, что используемые в уравнениях математической физики переменные всегда можно разделить на две группы: первая группа состоит из так называемых измеряемых переменных (смещение, скорость, температура и т. д.), а вторая — из неизмеряемых величин (напряжение, импульс, тепловой поток и т. д.).

Такое разделение переменных несет глубинный смысл, особенно для линейных систем. Связь между этими группами переменных устанавливается только в уравнениях состояния, поэтому все определяющие уравнения можно разделить на три группы.

К *первой группе* отнесем уравнения состояния, связывающие измеряемые и неизмеряемые неизвестные. Эти уравнения описывают взаимодействие малых объемов в соответствии с законами состояния и учитывают перемещения элементарных частиц в пространстве и времени. Также эти уравнения содержат информацию о внутренних свойствах исследуемого объекта. *Вторая группа* характеризует свойства среды в характерном объеме и отражает законы баланса и непрерывности. Соотношения из *третьей группы* уравнений определяются внешними условиями, включая в общем случае граничные и начальные ограничения.

Рассмотрим такое разделение определяющих уравнений по группам на примере задачи линейной упругости. К первой группе относятся уравнения состояния:

$$p - \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \sigma - C : \varepsilon^0 = 0, \quad (1)$$

где σ — тензор напряжений; ε^0 — тензор деформаций; u — вектор перемещений; p — вектор плотности импульсов; ρ — объемная плотность материала; C — тензор модулей упругости; двоеточие означает двойное скалярное произведение.

Эти уравнения связывают измеряемые и неизмеряемые переменные: в данном случае скорости точек $\partial u/\partial t$ и плотности импульсов p в первом уравнении, а также деформации ε^0 и напряжения σ — во втором уравнении. Связь между измеряемыми и неизмеряемыми переменными в этих соотношениях осуществляется посредством материальных

констант, а именно: объемной плотностью материала ρ для первого уравнения и тензором моделей упругости C для второго уравнения.

Уравнение динамического равновесия (уравнение баланса)

$$\nabla \cdot \sigma - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

представляет вторую группу. Это уравнение связывает между собой только неизмеряемые переменные, а именно: напряжения σ и импульсы p. При этом свойства среды в это соотношение не входят.

Третья группа состоит, во-первых, из начальных условий

$$u = u(x, t_0), \frac{\partial u}{\partial t} = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}, \qquad (3)$$

затем из граничных условий

$$u = u_1(x, t_0), \quad x \in \Gamma_1, \qquad (4)$$

$$\sigma n = q_2(x, t), \quad x \in \Gamma_2,$$

а также из специальных геометрических ограничений

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^{\mathrm{T}}), \qquad (5)$$

где $u_1(x, t_0)$ и $q_2(x, t)$ — заданные граничные функции; n — вектор внешней нормали к границе тела; t_0 — начальный момент времени.

В вычислительной физике предполагается, что некоторые определяющие соотношения ослабляются. К настоящему времени разработаны несколько подходов, основанных на ослаблении соотношений. Среди них можно отметить вариационные методы, проекционные подходы и метод наименьших квадратов.

Важное свойство *вариационных принципов* заключается в том, что из них непосредственно следуют основные уравнения, описывающие поведение среды, как стационарные условия, соответствующие функционалу. Кроме того, вариационные постановки имеют ряд преимуществ по сравнению с постановками задач в частных производных.

Во-первых, задача, сформулированная в частных производных, может быть сведена к эквивалентной интегродифференциальной, которая зачастую решается проще исходной. Существует регулярная процедура, основанная на методе множителей Лагранжа, которая для интегральной формулировки позволяет учитывать специфические ограничения.

Во-вторых, при численной реализации вариационных принципов гарантируется устойчивость алгоритмов и оптимальность приближенных решений. При этом результирующая система уравнений, как правило, симметрична и положительно определена.

Другой метод, который также можно отнести к общим для решения задач математической физики, — это *метод наименьших квадратов*. Суть метода состоит в следующем: все уравнения, описывающие исследуемое явление, возводятся в квадрат, суммируются и интегрируются в пространстве и времени. При этом известно, что минимум этого функционала равен нулю. Также явные двусторонние оценки качества решения могут быть соответственно построены. Нижняя грань функционала известна, и значение функционала на приближенном решении всегда может быть выбрано в качестве верхней границы.

Однако следует отметить, что уравнения Эйлера (условия стационарности) для данной задачи минимизации в целом отличаются от системы уравнений в частных производных, порождающей этот функционал. Другими словами, задача, полученная методом наименьших квадратов, является вариационным принципом, но для другой краевой задачи. Таким образом, вопросы существования и единственности решения этой системы требуют дальнейшего исследования.

Общей чертой, присущей всем упомянутым методам, является некоторая неоднозначность в формулировке конечномерной задачи: непонятно, какие соотношения лучше всего ослабить. Рассмотрим уравнения линейной упругости (статический случай). В исходной формулировке имеется 15 переменных, а именно: 12 компонент тензора напряжений и деформаций, три компонента вектора смещения, которые соответствуют девяти уравнениям в частных производных (уравнения равновесия и кинематические соотношения), а также шести определяющим алгебраическим соотношениям (закон Гука).

Если все соотношения, включая граничные условия, взяты в интегральной (слабой) форме, то это утверждение совпадает с принципом Ху-Васидзу, который содержит 18 переменных (добавлены три множителя Лагранжа) и не имеет ограничений. Физический смысл множителей Лагранжа следует из условий стационарности соответствующего функционала. Требуя разрешения определенных основных уравнений, можно уменьшить количество независимых переменных в вариационной формулировке. Например, можно вывести принцип Хеллингера—Рейсснера, в котором имеется 12 неизвестных функций. Последовательно исключая переменные, получаем классический принцип минимума полной потенциальной энергии, при котором остаются только три переменные, составляющие вектора перемещений [5]. Эквивалентность этих принципов теоретически обоснована, но с практической точки зрения существует значительная разница — решается задача относительно трех или 15 функций.

При описании явлений, происходящих в механике сплошных

сред, используются двойственные вариационные принципы, одни из которых записываются в перемещениях, а другие — в напряжениях. Например, в линейной теории упругости принцип минимальной потенциальной энергии отражает равновесное состояние тела. Другой подход состоит в том, что только уравнения первого типа рассматриваются в интегральной квадратичной форме, тогда как другие уравнения должны быть точно выполнены.

Начально-краевая задача, измененная в соответствии с этим подходом, может быть, например, сведена к минимизации квадратического неотрицательного (энергетического) функционала относительно всех допустимых переменных.

Составим квадратичную форму:

$$\varphi(u,\sigma)=\frac{1}{2}(\sigma-C:\varepsilon^0)\div \quad (6)$$
$$\div(C^{-1}:\sigma-\varepsilon^0)+\frac{1}{2\rho}\left(p-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)\times$$
$$\times\left(p-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

Можно показать, что энергетический функционал Φ, составленный с использованием формулы (6), всегда не отрицателен:

$$\Phi(u,\sigma)=\int_{\Omega\times T}\varphi(u,\sigma)\,d\Omega dt\geqslant 0. \quad (7)$$

Суть этого функционала заключается в том, что в него входят шесть состояний энергий, три из которых составляют квадратичное соотношение, вытекающее из уравнения состояния, связывающее напряжения и деформации. При этом одна упругая энергия выражена через измеряемые переменные (перемещения). В другую составляющую входят неизмеряемые переменные (напряжения), а в третье слагаемое — и перемещения, и напряжения.

Чтобы подробно проанализировать начально-краевую задачу (1)—(5), рассмотрим квадраты уравнений состояния (1). Первое соотношение из уравнений (1) для приближенного решения отражает рассогласование T_d плотностей кинетических энергий системы:

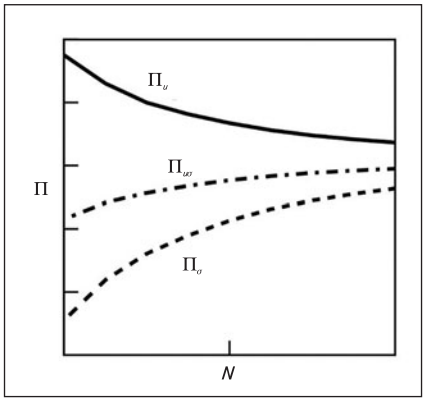
$$T_d=\frac{1}{2\rho}\left(p-\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2= \quad (8)$$
$$=\frac{p^2}{2\rho}-2\frac{p}{2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{p}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\geqslant 0.$$

Здесь предполагается, что $p(x)$ и $u(x)$ являются переменными задачи. Можно выделить три энергетических члена, имеющих различную физическую трактовку: $T_p=p^2/2\rho$ — плотность кинетической энергии, зависящая только от неизмеряемых переменных, а именно импульсов; $T_{pu}=\frac{p}{2}\frac{\partial u}{\partial t}$ — плотность энергии, выраженная через измеряемые (скорости точек тела) и неизмеряемые величины; $T_u=\frac{p}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ — последний член зависит только от геометрических (измеряемых) переменных.

Квадрат второго уравнения в формуле (6) отражает невязку в плотностях упругой энергии системы:

$$\Pi_d=\frac{C^{-1}:(\sigma-C:\varepsilon^0):(\sigma-C:\varepsilon^0)}{2}=$$
$$=\frac{\sigma:C^{-1}:\sigma}{2}-2\frac{\sigma:\varepsilon^0}{2}+\frac{\varepsilon^0:C:\varepsilon^0}{2}\geqslant 0.$$

Здесь предполагается, что $\sigma(x)$ и $u(x)$ являются переменными задачи. Как и в предыдущем случае, можно выделить три различных энергетических члена: $\Pi_\sigma=\frac{\sigma:C^{-1}:\sigma}{2}$ — плотность упругой энергии, зависящая только от неизмеряемых переменных, а именно от напряжений;



Сходимость упругих энергий

$\Pi_{\sigma\varepsilon}=\frac{\sigma:\varepsilon^0}{2}$ — плотность энергии, выраженная через измеряемые (деформации) и не измеряемые величины; $\Pi_\varepsilon=\frac{\varepsilon^0:C:\varepsilon^0}{2}$ — последний член в зависимости от геометрических (измеряемых) переменных.

Принцип, определяющий истинное состояние системы, состоит в том, что **истинное состояние системы достигается тогда и только тогда, когда изменение энергетического функционала равно нулю при любых допустимых виртуальных перемещениях, напряжениях и импульсах.**

Такой подход также позволяет естественным образом сформулировать критерии точности приближенных решений и строить решения для сложных нестационарных динамических систем с нерегулярной формой с наперед заданной точностью.

Представление уравнений состояния (1) в квадратичном виде (6) и (7) обладает рядом преимуществ. Во-первых, при любых приближенных действительных полях перемещений напряжений и импульсов эти величины неотрицательны, как квадраты функций. Во-вторых, для точного решения задачи (1)—(5) значения энергий T_d и Π_d строго равны нулю. Другими словами, для довольно точных аппроксимаций

искомых функций σ, u и p величины T_d и Π_d имеют малые значения, т. е. справедливы следующие соотношения:

- *для кинетической энергии*

$$T_p << \frac{p^2}{2\rho};\ T_d << \frac{p}{2}\frac{\partial u}{\partial t};\quad (10)$$

$$T_d << \frac{p}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2;$$

- *для потенциальной энергии*

$$\Pi_d << \Pi_\sigma = \frac{\sigma : C^{-1} : \sigma}{2};\quad (11)$$

$$\Pi_d << \Pi_{\sigma\varepsilon} = \frac{\sigma : \varepsilon^0}{2};$$

$$\Pi_d << \Pi_\varepsilon = \frac{\varepsilon^0 : C : \varepsilon^0}{2}.$$

Неравенства (8) и (9) позволяют построить разнообразные оценки точности приближенного решения.

Характерные зависимости упругих энергий $\Pi_\sigma, \Pi_{\sigma\varepsilon}, \Pi_\varepsilon$ от числа степеней свободы показаны на *рисунке*.

Вывод

Обсуждены некоторые подходы и принципы математического моделирования в строительной механике. Описана полезная декомпозиция как переменных, так и определяющих соотношений. Показано, каким образом начально-краевая задача может быть сведена к минимизации квадратического неотрицательного (энергетического) функционала относительно всех допустимых переменных. Сформулирован энергетический принцип, определяющий истинное состояние системы. Такой подход также позволяет естественным образом сформулировать критерии точности приближенных решений и построить решения для сложных нестационарных динамических систем с нерегулярной формой с наперед заданной точностью.

Работа выполнена в рамках Госзадания № 123021700050-1.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Kostin G. V., Saurin V. V.* Integrodifferential relations in linear elasticity [Интегродифференциальные отношения в линейной упругости]. Berlin : De Gruyter, 2012. 280 p.
2. *Kostin G.V., Saurin V. V.* Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations [Динамика твердых структур. Метод с использованием интегродифференциальных отношений]. Berlin : De Gruyter, 2017. 305 p.
3. *Костин Г. В., Саурин В. В.* Метод интегродифференциальных соотношений в линейной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 36–49.
4. *Саурин В. В.* О вариационных подходах в линейной теории упругости // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415. № 4. С. 486–490. URL: https://naukarus.com/o-variatsionnyh-podhodah-v-lineynoy-teorii-uprugosti (дата обращения: 2.09.2023).
5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М. : Мир, 1987. 542 с.

REFERENCES

1. Kostin G. V., Saurin V. V. *Integrodifferential relations in linear elasticity*. Berlin, De Gruyter, 2012. 280 p.
2. Kostin G. V., Saurin V. V. *Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations*. Berlin, De Gruyter, 2017. 305 p.
3. Kostin G. V., Saurin V. V. The method of integrodifferential relations in the linear theory of elasticity. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2007, no. 2, pp. 36–49. (In Russ.).
4. Saurin V. V. On variational approaches in the linear theory of elasticity. *Doklady Akademii nauk*, 2007, vol. 415, no. 4, pp. 486–490. (In Russ.). Available at: https://naukarus.com/o-variatsionnyh-podhodah-v-lineynoy-teorii-uprugosti (accessed 2.09.2023). (In Russ.).
5. Vasidzu K. *Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow, Mir Publ., 1987. 542 p. (In Russ.).

ЖУРНАЛ «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО» ИНДЕКСИРУЮТ:

НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА eLIBRARY.RU

Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science

ULRICHSWEB™ GLOBAL SERIALS DIRECTORY

САЙТ ЖУРНАЛА «ПРОМЫШЛЕННОЕ И ГРАЖДАНСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО»: **www.pgs1923.ru**