УДК 624.04:534.11 DOI: 10.33622/0869-7019.2020.07.16-25

Точные аналитические решения нестационарных задач для стержней на основе теории С. П. Тимошенко

Александр Леонидович ЗОНЕНБЕРГ, соискатель кафедры строительной и теоретической механики НИУ МГСУ, e-mail: zonenberg@list.ru

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ), 129337 Москва, Ярославское ш., 26

Аннотация. *На основе теории С. П. Тимошенко приведены точные аналитические решения нестационарных задач для стержней в общем виде. Эти решения необходимы для исследования переходных волновых процессов деформации стержней при поперечных динамических воздействиях, приложенных лишь на короткий промежуток времени или быстро изменяющихся. В работе использованы операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа—Карсона, методы динамики сооружений, программа Mathad (построение графиков). Представлены в общем виде точные формулы, содержащие в том числе интегралы от бесселевых функций, для определения усилий в полубесконечных стержнях различных типов, а также в бесконечном стержне при решении вспомогательной задачи. Для каждой задачи сделано заключение о наличии разрывов в решении. Особо отмечена ситуация, когда силовые воздействия являются импульсными. В качестве иллюстрации даны графики изменения во времени усилий в стержнях, вычисленных по приведенным формулам при воздействиях специального вида. Результаты работы можно использовать в практике расчета зданий и сооружений на действие ударных и взрывных нагрузок, при уточненной оценке параметров колебаний, возбуждаемых промышленными предприятиями, транспортными средствами и т. д.*

Ключевые слова: *переходные волновые процессы, теория С. П. Тимошенко, стержни, бегущие волны, операционное соотношение, бесселевы функции.*

EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS TO NON-STATIONARY PROBLEMS FOR RODS BASED ON S. P. TIMOSHENKO THEORY

Alexander L. ZONENBERG, e-mail: zonenberg@list.ru

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Yaroslavskoe shosse, 26, Moscow 129337, Russian Federation

Abstract. *Based on the theory of S.P. Timoshenko, exact analytical solutions of non-stationary problems for rods in general form are given. Such solutions are necessary for the study of transient wave processes of deformation in rods under transverse short-term and fast-changing effects. The work uses operational calculus based on the integral Laplace—Carson transformation, methods of structure dynamics, Mathcad program (drawing of graphs). Exact formulas are given in general form, including integrals from Bessel functions, to determine efforts in semi-infinite rods of various types, as well as in an infinite rod when solving an auxiliary problem. For each task, a conclusion is made on the existence of discontinuities. The situation where force impacts are pulsed is highlighted. As an illustration, graphs of changes in time of efforts in rods calculated according to the given formulas under effects of special type are given. The results of the work can be used in the practice of calculating buildings and structures for the effect of impact and explosive loads, with a refined assessment of the parameters of oscillations excited by industrial enterprises, vehicles, etc.*

Key words. *Transient wave processes, S.P. Timoshenko theory, rods, traveling waves, operational ratio, Bessel functions.*

Введение

Строительные конструкции в процессе эксплуатации могут подвергаться различным динамическим нагрузкам, среди которых важную роль играют воздействия, приложенные лишь на короткий промежуток времени или быстро изменяющиеся. Это явление, которое следует рассматривать с точки зрения распространения волн напряжения [1], приводит к отысканию решения нестационарной задачи теории волн.

Данная статья продолжает тему предыдущей работы автора [2], посвященной актуальной проблеме построения в общем виде точных аналитических решений нестационарных задач теории С. П. Тимошенко [3] для стержней в физически наглядной и удобной для практических расчетов форме. Такие решения необходимы для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях при поперечных кратковременных и быстроизменяющихся воздействиях.

Важно, чтобы были удовлетворены следующие требования:

- решения должны быть в **общем виде**;
- решения должны быть в **бегущих волнах**, так как переходные процессы наиболее ясно описываются именно такими решениями;

© ЗОНЕНБЕРГ А. Л., 2020

• формы представления этих решений должны удовлетворять, например, общим условиям, упомянутым в работе [4]: обозримости результата, позволяющей судить об основных чертах исследуемого процесса, и возможности вычислений с заданной точностью.

Анализ исследований по теории С. П. Тимошенко показал, что **в общем виде** решения в **бегущих волнах** отсутствуют. Из работ, в том числе обсуждаемых в обзоре [5] и современных [6—10], следует, что имеются решения в бегущих волнах некоторых **частных** задач. Но эти решения или имеют «неволновую» структуру, или их эффективность при вычислениях достигается только в сравнительно небольших областях значений координаты и времени. Исключениями являются работы [11—13], в которых рассмотрены лишь частные задачи.

Таким образом, построение искомых решений явилось актуальной проблемой. Цель статьи состоит в построении указанных решений для различных типов полубесконечных стержней, а также решения вспомогательной задачи для бесконечного стержня. В работе [2] был описан **метод** их получения, сформулированы вспомогательная задача для бесконечного и различные типы задач для полубесконечных однородных призматических стержней. Использовано операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа—Карсона [14]. Получены новые операционные соотношения, на основе которых найдены без использования общей формулы обращения [14] так называемые основные функции [2]. Эти функции представлены в виде интегралов от бесселевых функций [15]. На примере частной задачи показан метод получения точного решения.

Используя новые операционные соотношения [2] и некоторые известные теоремы операционного исчисления [14, 16—19], для всех сформулированных задач получены **полные результаты** — точные формулы **в общем виде** для функций перемещений и усилий. В данной статье приводятся точные формулы для определения **усилий**.

1. Постановка задачи

Как и в работе [2], перечислим условные обозначения:

Ox, Oy, Oz — оси прямоугольной системы координат (x — координата вдоль оси стержня); t — время; A_b — площадь поперечного сечения стержня; J_b — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси Oy; k' — коэффициент сдвига; ρ — объемная плотность; E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; q — интенсивность внешней поперечной нагрузки; w — поперечное перемещение центра тяжести сечения стержня от положения его статического равновесия; ψ — угол поворота поперечного сечения, обусловленный изгибом, относительно нейтральной оси; M — изгибающий момент; Q — поперечная сила.

Уравнения Тимошенко имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &EJ_b\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+k'A_bG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)-\rho J_b\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0,\\ &-k'A_bG\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\rho A_b\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Для изгибающего момента и поперечной силы имеем выражения:

$$M=-EJ_b\frac{\partial\psi}{\partial x};\quad Q=k'A_bG\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right). \quad (2)$$

Далее рассмотрены задачи, сформулированные в работе [2]:

— задача (названная здесь *Вспомогательной*, служащая основой исследований) для бесконечного стержня ($-\infty<x<\infty$) при нулевых начальных условиях, находящегося под действием поперечной сосредоточенной импульсной нагрузки, приложенной в момент времени $t=0$ ($q(x,t)=R\delta_1(x)\delta_1(t)$, где $R=\text{const}$, δ_1 — единичная импульсивная функция);

— три типа нестационарных задач **в общем виде** для полубесконечного стержня ($0\leqslant x<\infty$) при нулевых начальных условиях и следующих условиях закрепления конца $x=0$, а также внешних нестационарных воздействиях, приложенных к концу $x=0$:

• *задача* I_0 — конец $x=0$ свободно оперт; опора смещается по закону $w_0(t)$, на конце $x=0$ приложен изгибающий момент $M_0(t)$;

• *задача* II_0 — конец $x=0$ защемлен; опора смещается по закону $w_0(t)$ и поворачивается по закону $\psi_0(t)$;

• *задача* III_0 — на свободном конце $x=0$ приложены изгибающий момент $M_0(t)$ и поперечная сила $Q_0(t)$.

Здесь $w_0(t)$, $\psi_0(t)$, $M_0(t)$, $Q_0(t)$ — заданные функции времени t, причем, исходя из физического смысла, будем считать функции $w_0(t)$ и $\psi_0(t)$ непрерывными при $t\geqslant 0$ и равными нулю при $t=0$.

Отметим также, что в некоторых случаях возникает необходимость рассмотреть задачи для полубесконечного стержня $-\infty<x\leqslant l$ — соответственно задачи I_l, II_l, III_l. Воздействия на конце $x=l$ следующие: в задаче I_l — $w_l(t)$ и $M_l(t)$, в задаче II_l — $w_l(t)$ и $\psi_l(t)$, в задаче III_l — $M_l(t)$ и $Q_l(t)$. Решения этих задач очевидным образом получаются из решений задач I_0, II_0, III_0.

1. Основные функции, входящие в решения нестационарных задач в виде бегущих волн для стержней на основе теории Тимошенко

Функция f	Область	Формулы для функции	$[f]_{1,2}$
$\varphi_n(x,t)$ $(n=0,1)$ $\left[\frac{(2\sqrt{C})^{1-n}}{c_1}\right]$	$t<\frac{x}{c_1}$	0	$-nc_1$
	$\frac{x}{c_1}<t<\frac{x}{c_2}$	$H\left(\frac{x}{c_1}\right)+nc_1J_0(A_4X_3)$	
	$t>\frac{x}{c_2}$	$H\left(\frac{t}{v}\right)+nc_1J_0(A_4X_3)$	0
	$H(t^*)=-\frac{c_1A_3(-\sqrt{C})^{n-1}}{2}\int\limits_{t^*}^{t}\left(\frac{v\tau-t}{t-\tau}\right)^{\frac{n}{2}}J_0(A_4X_1)J_n(A_3X_2)d\tau$		
$\tilde{\varphi}_1(x,t)$ $\left[\frac{1}{c_1}\right]$	$t<\frac{x}{c_1}$	0	0
	$\frac{x}{c_1}<t<\frac{x}{c_2}$	$H\left(\frac{x}{c_1}\right)$	
	$t>\frac{x}{c_2}$	$H\left(\frac{t}{v}\right)-c_2J_0\left(\frac{1}{v}A_4X_5\right)$	c_2
	$H(t^*)=\frac{c_1A_3}{2}\int\limits_{t^*}^{t}\left(\frac{t-\tau}{v\tau-t}\right)^{\frac{1}{2}}J_0(A_4X_1)J_1(A_3X_2)d\tau$		
$\kappa(t)$ $\left[\frac{1}{c_1h}\right]$	$t>0$	$c_1c_2\left[-\frac{v}{v+1}\int\limits_0^t J_0(\lambda X_6)d\tau+\int\limits_0^t J_0(\lambda\tau)d\tau\right]$	
$\theta(t)$ $\left[\frac{1}{c_1h}\right]$	$t>0$	$c_1c_2\left[-\frac{1}{v+1}\int\limits_0^t J_0(\lambda X_7)d\tau+\int\limits_0^t J_0(\lambda\tau)d\tau\right]$	
$\theta_3(t)$ $[c_1^2C]$	$t>0$	$-\frac{v-1}{(v+1)v\sqrt{C}}\int\limits_0^t\left(\frac{t-\tau}{t+\frac{v-1}{v+1}\tau}\right)^{\frac{1}{2}}J_1(\lambda X_7)d\tau+$ $+c_1c_2\int\limits_0^t J_0(\lambda\tau)(t-\tau)d\tau+\frac{1}{c_1^2C}J_0(\lambda\tau)-\frac{1}{c_1^2C}$	

Примечания: 1. J_0, J_1, J_n — бесселевы функции первого рода нулевого, первого и n-го порядков [15].

2. В данной таблице приняты следующие условные обозначения:

$X_1=\sqrt{\tau^2-(x/c_1)^2}$; $X_2=\sqrt{(t-\tau)(v\tau-t)}$; $X_3=\sqrt{t^2-(x/c_1)^2}$; $X_5=\sqrt{t^2-(x/c_2)^2}$;

$X_6=\sqrt{\left(t-\frac{v-1}{v+1}\tau\right)(t-\tau)}$; $X_7=\sqrt{\left(t+\frac{v-1}{v+1}\tau\right)(t-\tau)}$.

2. Основные функции (продолжение)

Функция f	$[f]_{1,2}$
$\varphi_n'(x,t)$ $(n=0,1)$ $\left[\frac{(\sqrt{C})^{1-n}h}{c_1}\right]$	$\begin{cases}\frac{A_3}{2\sqrt{C}}, & n=0,\\ \frac{-A_3^2x}{8c_1}(v^2-1), & n=1\end{cases}$ $\begin{cases}-\frac{A_3}{2\sqrt{C}}, & n=0,\\ 0, & n=1\end{cases}$
$\dot{\varphi}_0(x,t)$ $\left[\frac{2\sqrt{C}}{c_1A_3}\right]$	$-\frac{c_1A_3}{2\sqrt{C}}$ $\frac{c_2A_3}{2\sqrt{C}}$
$\tilde{\varphi}_1'(x,t)$ $\left[\frac{h}{c_1}\right]$	0 $-\frac{A_3^2x}{8c_2}\left(1-\frac{1}{v^2}\right)$

$$C=\frac{\rho A_b}{EJ_b};\ v=\frac{c_1}{c_2};$$

$$A_1=\frac{1}{c_1c_2}\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2}{2}};$$

$$A_2=\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2+c_2^2};\ A_3=\frac{2\sqrt{C}}{\frac{1}{c_2^2}-\frac{1}{c_1^2}};$$

$$A_4=\frac{1}{2}A_3(v-1);\ \lambda=c_1c_2\sqrt{C}.$$

2. Точные аналитические выражения для усилий в бесконечном и полубесконечном стержнях

Используя новые операционные соотношения [2] и теоремы операционного исчисления [14, 16—19], получены точные аналитические решения нестационарных задач: вспомогательной задачи для бесконечного стержня и задач I_0, II_0, $III_/$ **(в общем виде)** для полубесконечного стержня *(табл. 1—9)*.

Приведем выражения для постоянных, используемых далее:

$$c_1=\sqrt{\frac{E}{\rho}};\ c_2=\sqrt{\frac{k'G}{\rho}};$$

Для **полубесконечного** стержня значения искомых функций для каждого значения x можно определить, вычисляя значения следующих функций:

- основных функций [2] (см. *табл. 1, 2*);

• функций, названных функциями влияния (обозначены «звездочкой» в верхнем индексе) [2] (см. *табл. 4, 6, 8*). Функции влияния выражаются через основные функции и интегралы от них;

• искомых функций (см. *табл. 5, 7, 9*). В выражениях для искомых функций присутствуют функции внешнего воздействия (заданные непосредственно и их производные по t) и свертки этих функций с функциями влияния.

Для **бесконечного** стержня второй этап пропускается, а значения искомых функций вычисляются по *табл. 3*. Искомые функции выражаются через основные функции и интегралы от них.

Далее штрихом обозначено дифференцирование по x, точкой — дифференцирование по t.

В *табл. 3—7* в зависимости от соотношения t, x/c_1, x/c_2 и в *табл. 8, 9* в зависимости от соотношения $t, (l-x)/c_1, (l-x)/c_2$ интервалы интегрирования можно разбить на интервалы, в которых подынтегральная функция имеет конкретное аналитическое выражение (аналогично разбиению на интервалы в формулах для функций $\varphi_n(x,t)$ и $\widetilde{\varphi}_1(x,t)$, см. *табл. 1*). Тогда будет явно видна структура формул, подтверждающая известный факт: теория С. П. Тимошенко описывает распространение двух волн со скоростями фронтов c_1 и c_2; нижний и верхний пределы интегралов, вид аргумента функции типа $J_0\left[A_4\sqrt{\tau^2-\left(\frac{x}{c_1}\right)^2}\right]$ имеют ясно выраженный волновой характер.

В четвертой графе *табл. 1*, а также во второй графе *табл. 2* для некоторых функций (f), зависящих от x и t, приведены величины

$$[f]_1 = f(x, x/c_1 - 0) - f(x, x/c_1 + 0),$$
$$[f]_2 = f(x, x/c_2 - 0) - f(x, x/c_2 + 0),$$

которые оказались необходимыми в дальнейших выкладках. В *табл. 3, 5, 7, 9*, где представлены аналитические выражения для усилий в бесконечном и полубесконечном стержнях, в третьей графе содержатся вычисленные по этим формулам величины разрывов функций на фронтах изгибной и сдвиговой волн, т. е. при $t = x/c_1$ и $t = x/c_2$ (в *табл. 9* для задачи III_l — при $t = (l-x)/c_1$ и $t = (l-x)/c_2$, т. е. в указанных формулах $x/c_{1,2}$ следует заменить на $(l-x)/c_{1,2}$). В этой же графе величины типа $M_0(0)$ обозначают $M_0(+0)$.

3. Задача для бесконечного стержня. Усилия в стержне

Функция	Формулы для функции	Величина разрыва функции
$M(x,t)$ $\left[\frac{h}{EJ_b}\right]$	$R\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \varphi_0''(x,\tau)d\tau - \frac{A_3}{4\sqrt{C}}\left[\frac{1}{c_1}\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)-\frac{1}{c_2}\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]\right\}$	$\frac{R}{c_1}\frac{A_3}{4\sqrt{C}}$ $-\frac{R}{c_2}\frac{A_3}{4\sqrt{C}}$
$Q(x,t)$ $\left[\frac{1}{k'A_bG}\right]$	$-\frac{R}{2}\left[\widetilde{\varphi}_1'(x,t)+\delta_1\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]$	0 —

4. Задача I_0. Функции влияния

Функция	Формулы для функции	Функция	Формулы для функции
$M_w^*(x,t)$ $\left[\frac{h}{\rho A_b c_1^3}\right]$	$\rho A_b \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\varphi_0(x,t)$	$Q_w^*(x,t)$ $\left[\frac{c_1}{k'A_bG}\right]$	$\rho A_b \widetilde{\varphi}_1(x,t)$
$M_M^*(x,t)$ $\left[\frac{h}{c_1}\right]$	$-\varphi_1'(x,t)$	$Q_M^*(x,t)$ $\left[\frac{1}{Cc_1^3}\right]$	$-C\dot{\varphi}_0(x,t)$

5. Задача I_0. Усилия в стержне

Функция	Формулы для функции	Величина разрыва функции
$M(x,t)$ $\left[\frac{h}{EJ_b}\right]$	$\int_0^t M_w^*(x,\tau)w_0(t-\tau)d\tau + \int_0^t M_M^*(x,\tau)M_0(t-\tau)d\tau -$ $-\rho A_b\frac{A_3}{2\sqrt{C}}\left[w_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)-w_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]+$ $+M_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)$	$-M_0(0)$ 0
$Q(x,t)$ $\left[\frac{1}{k'A_bG}\right]$	$\int_0^t Q_w^*(x,\tau)\ddot{w}_0(t-\tau)d\tau + \int_0^t Q_M^*(x,\tau)M_0(t-\tau)d\tau + \dot{w}_0(0)Q_w^*(x,t)$	0 $\rho A_b c_2 \dot{w}_0(0)$

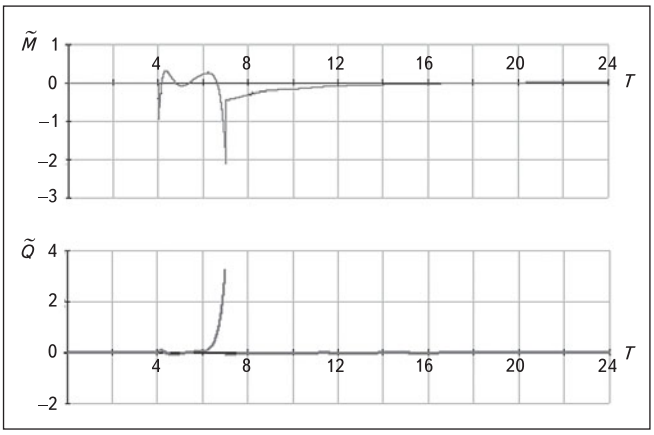
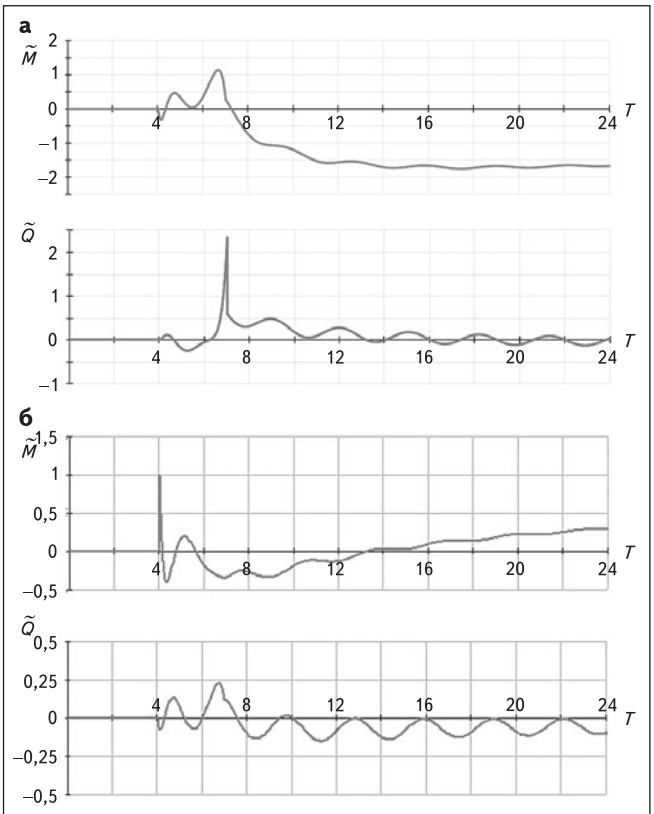


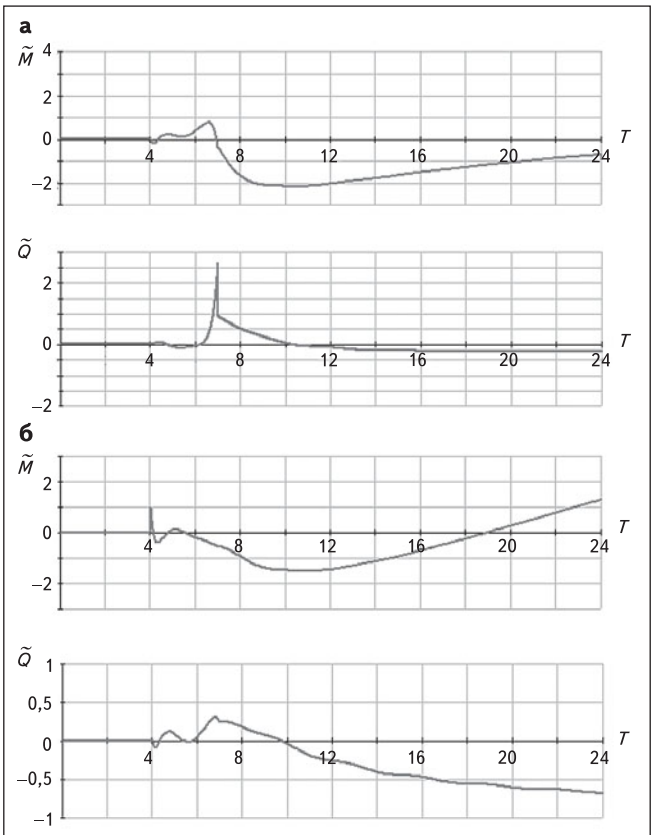
Рис. 1. ***Задача для бесконечного стержня ($-\infty < \eta < \infty$), находящегося под действием поперечной сосредоточенной импульсной нагрузки $\tilde{q}(\eta, T) = \delta_1(\eta)\delta_1(T)$. Изменение во времени усилий в сечении $\eta = 4$ при $\nu = 1{,}75$ (функция Q имеет особенность типа импульсивной функции: $-0{,}5\,\delta_1(T - \nu\eta)$)***



а — при смещении опоры по закону $\tilde{w}_0(T) = T$; б — при внезапном приложении на конце изгибающего момента, остающегося затем постоянным ($\tilde{M}_0(T) = \delta_0(T)$)

Рис. 2. ***Задача I_0: конец полубесконечного стержня ($0 \leqslant \eta < \infty$) свободно оперт. Изменение во времени усилий в сечении $\eta = 4$ при $\nu = 1{,}75$***

Далее для каждой из рассмотренных задач сделано заключение о наличии разрывов (для функций усилий — непосредственно на основе таблич-



а — при смещении опоры по закону $\tilde{w}_0(T) = T$; б — при повороте опоры по закону $\tilde{\psi}_0(T) = T$

Рис. 3. ***Задача II_0: конец полубесконечного стержня ($0 \leqslant \eta < \infty$) защемлен. Изменение во времени усилий в сечении $\eta = 4$ при $\nu = 1{,}75$***

ных данных). Особо отмечена ситуация, когда силовые воздействия являются импульсными.

В качестве иллюстрации применения *табл. 1—9* на *рис. 1—4* приведены графики изменения во времени усилий в стержнях при $\nu = 1{,}75$ в одном из сечений при **воздействиях специального вида** [18]. Подобные результаты позволяют получить представление о поведении стержня. Построение графиков выполнено с использованием программы Mathcad.

При этом будем рассматривать стержень с прямоугольным поперечным сечением высотой h ($k' = 5/6$). Введем безразмерную координату точки оси стержня и безразмерное время:

$$\eta = x/h,\ T = c_1\, t/h,$$

а также

$$\eta_l = (l - x)/h.$$

Основные функции, функции влияния и искомые функции приводим к безразмерному виду умножением на коэффициенты, указанные в квадратных скобках под обозначением функции в *табл. 1—9*. Так, для искомых функций

6. Задача II_0. Функции влияния

Функция	Формулы для функции
$M_w^*(x,t)$ $\left[\frac{h}{\rho A_b c_1^3}\right]$	$\rho A_b\left[-\int_0^t \varphi_1'(x,\tau)\kappa_2(t-\tau)d\tau+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\varphi_0(x,t)-\kappa_1(0)\varphi_1'(x,t)+ +\kappa_2\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right]$
$M_\psi^*(x,t)$ $\left[\frac{h^2}{EJ_b c_1}\right]$	$\rho A_b\left\{-\int_0^t \varphi_0''(x,\tau)\kappa_1(t-\tau)d\tau+\frac{1}{C}\varphi_1''(x,t)+ +\frac{A_3}{2\sqrt{C}}\left[-\frac{1}{c_1}\kappa_1\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)+\frac{1}{c_2}\kappa_1\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]\right\}$
$Q_w^*(x,t)$ $\left[\frac{1}{k'A_bG}\frac{h^2}{c_1}\right]$	$k'A_bG\left[\frac{\partial}{\partial x}w_w^*(x,t)-\psi_w^*(x,t)\right]$
$Q_\psi^*(x,t)$ $\left[\frac{1}{\rho A_b}\frac{h}{c_1^3}\right]$	$\rho A_b\left[-\int_0^t \tilde{\varphi}_1'(x,\tau)\kappa_2(t-\tau)d\tau-\kappa_1(0)\tilde{\varphi}_1'(x,t)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\varphi_0(x,t)- -\kappa_2\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]$

7. Задача II_0. Усилия в стержне

Функция	Формулы для функции	Величина разрыва функции
$M(x,t)$ $\left[\frac{h}{EJ_b}\right]$	$\int_0^t M_w^*(x,\tau)w_0(t-\tau)d\tau+\int_0^t M_\psi^*(x,\tau)\psi_0(t-\tau)d\tau-$ $-\rho\frac{A_bA_3}{2\sqrt{C}}\left[\frac{1}{v}w_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)-w_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]+$ $+\left[-\frac{EJ_bA_3^2x(v^2-1)}{8c_1^2}\psi_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)+\frac{EJ_b}{c_1}\dot{\psi}_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\right]\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)$	$-\frac{EJ_b}{c_1}\dot{\psi}_0(0)$ 0
$Q(x,t)$ $\left[\frac{1}{k'A_bG}\right]$	$\int_0^t Q_w^*(x,\tau)w_0(t-\tau)d\tau+\int_0^t Q_\psi^*(x,\tau)\psi_0(t-\tau)d\tau-$ $-\left[\rho\frac{A_bA_3^2x(v^2-1)}{8v^2}w_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)+\frac{k'A_bG}{c_2}\dot{w}_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]\times$ $\times\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)-\rho\frac{A_bA_3}{2\sqrt{C}}\left[\psi_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right)-\right.$ $\left.-\frac{1}{v}\psi_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)\right]$	0 $\frac{k'A_bG}{c_2}\dot{w}_0(0)$

$$\tilde{w}=\frac{w}{h};\ \tilde{\psi}=\psi;\ \tilde{M}=\frac{hM}{EJ_b};$$
$$\tilde{Q}=\frac{Q}{k'A_bG}.$$

Аналогично приводятся к безразмерному виду функции внешних воздействий в задачах:

- для *полубесконечных* стержней:

$$\tilde{w}_0=\frac{w_0}{h};\quad \tilde{\psi}_0=\psi_0;$$
$$\tilde{\dot{w}}_0=\frac{\dot{w}_0}{c_1};\quad \tilde{\dot{\psi}}_0=\dot{\psi}_0\frac{h}{c_1};$$
$$\tilde{M}_0=\frac{hM_0}{EJ_b};\ \tilde{Q}_0=\frac{Q_0}{k'A_bG}\ \text{и т. д.};$$

- для *бесконечного* стержня:

$$\tilde{q}=\frac{h}{k'A_bG}q;\quad \tilde{R}=\frac{1}{k'A_bG}\frac{c_1}{h}R.$$

При этом для единичной функции Хевисайда и единичной импульсивной функции имеем следующие зависимости:

$$\delta_1(\eta)=h\delta_1(x);\ \delta_0(T)=\delta_0(t);$$
$$\delta_1(T)=\frac{h}{c_1}\delta_1(t).$$

Получены также безразмерные постоянные:

$$\tilde{C}=Cc_1^2h^2=12;$$
$$\tilde{A}_1=A_1c_1=\sqrt{\frac{v^2+1}{2}};$$
$$\tilde{A}_2=A_2=\frac{v^2-1}{v^2+1};$$
$$\tilde{A}_3=A_3\frac{h}{c_1}=\frac{4\sqrt{3}}{v^2-1};$$
$$\tilde{A}_4=A_4\frac{h}{c_1}=\frac{2\sqrt{3}}{v+1};$$
$$\tilde{\lambda}=\frac{\lambda h}{c_1}=\frac{2\sqrt{3}}{v}.$$

3. Таблицы формул, анализ функций, графики

В данном разделе рассмотрены таблицы формул для основных функций, функций влияния и искомых функций усилий, выполнен анализ искомых функций и приведены графические иллюстрации.

Помимо основных функций, представленных в *табл. 1 и 2*, введем в рассмотрение также следующие функции:

- $\mu_n(x,t)$ ($n=0$, 1) и $\tilde{\mu}_1(x,t)$, связанные с функциями $\varphi_n(x,t)$ ($n=0$, 1) и $\tilde{\varphi}_1(x,t)$ следующими зависимостями:

8. Задача III_l. Функции влияния

Функция	Формулы для функции
$M_M^*(x,t)$ $\left[\frac{h}{c_1}\right]$	$C\int_0^t \mu_0'(x,\tau)\theta_1(t-\tau)d\tau + \mu_1'(x,t)$
$M_Q^*(x,t)$ $\left[\frac{1}{c_1}\right]$	$-\int_0^t \mu_1''(x,\tau)\theta(t-\tau)d\tau - \int_0^t \mu_0''(x,\tau)d\tau + \left[\frac{1}{8}\frac{A_3^2}{c_1^2}(l-x)(v^2-1)\theta\left(t-\frac{l-x}{c_1}\right) - \frac{1}{c_1}\theta_1\left(t-\frac{l-x}{c_1}\right) - \frac{A_3}{2\sqrt{C}c_1}\right]\delta_0\left(t-\frac{x}{c_1}\right) + \frac{A_3}{2\sqrt{C}c_2}\delta_0\left(t-\frac{x}{c_2}\right)$
$Q_M^*(x,t)$ $\left[\frac{1}{Cc_1^3}\right]$	$C\left[\int_0^t \tilde{\mu}_1(x,\tau)\theta_2(t-\tau)d\tau + \theta_1(0)\tilde{\mu}_1(x,t) + \dot{\mu}_0(x,t)\right]$
$Q_Q^*(x,t)$ $\left[\frac{h}{c_1}\right]$	$-C\int_0^t \mu_0'(x,\tau)\theta_1(t-\tau)d\tau - \tilde{\mu}_1'(x,t)$

9. Задача III_r. Усилия в стержне

Функция	Формулы для функции	Величина разрыва функции
$M(x,t)$ $\left[\frac{h}{EJ_b}\right]$	$\int_0^t M_M^*(x,\tau)M_l(t-\tau)d\tau + \int_0^t M_Q^*(x,\tau)Q_l(t-\tau)d\tau + M_l\left(t-\frac{l-x}{c_1}\right)\delta_0\left(t-\frac{l-x}{c_1}\right)$	$-M_l(0)$ 0
$Q(x,t)$ $\left[\frac{1}{k'A_bG}\right]$	$\int_0^t Q_M^*(x,\tau)M_l(t-\tau)d\tau + \int_0^t Q_Q^*(x,\tau)Q_l(t-\tau)d\tau + Q_l\left(t-\frac{l-x}{c_2}\right)\delta_0\left(t-\frac{l-x}{c_2}\right)$	0 $-Q_l(0)$

$$\mu_n(x,t) = \varphi_n(l-x,t);$$

$$\tilde{\mu}_1(x,t) = \tilde{\varphi}_1(l-x,t);$$

• $\kappa_1(t)$, $\kappa_2(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, которые являются производными по t от функций $\kappa(t)$ и $\theta(t)$:

$$\kappa_1(t) = \frac{d}{dt}\kappa(t); \quad \kappa_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}\kappa(t);$$

$$\theta_1(t) = \frac{d}{dt}\theta(t); \quad \theta_2(t) = \frac{d^2}{dt^2}\theta(t).$$

3.1. Задача для бесконечного стержня (вспомогательная задача)

Функция $w(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_2$, функция $\psi(x,t)$ непрерывна. Формулы для функций усилий даны в *табл. 3*, откуда следует, что функция $M(x,t)$ имеет разрывы при $t = x/c_1$ и $t = x/c_2$, а функция $Q(x,t)$ имеет особенность типа импульсивной функции при $t = x/c_2$.

На *рис. 1* приведены графики изменения во времени усилий при $v = 1{,}75$ в сечении $\eta = 4$ при воздействии $q(x,t) = R\delta_1(x)\delta_1(t)$, где $R = k'A_bG\,h/c_1$ ($\tilde{q}(\eta,T) = \tilde{R}\delta_1(\eta)\delta_1(T)$, где $\tilde{R} = 1$).

3.2. Задача I_0

Функции $w(x,t)$ и $\psi(x,t)$ непрерывны. Формулы для функций влияния даны в *табл. 4*, для функций усилий — в *табл. 5*, из которой следует, что функция $M(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_1$, если $M_0(0) \neq 0$, а функция $Q(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_2$, если $\dot{w}_0(0) \neq 0$.

Рассмотрим ситуацию, когда заданное моментное воздействие является импульсным, т. е. $M_0(t) = R_M\delta_1(t)$, где R_M = const. Тогда функция $w(x,t)$ непрерывна, функция $\psi(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_1$. Анализ формул из *табл. 5* показывает следующее: функция $M(x,t)$ будет содержать особенность типа импульсивной функции $R_M\delta_1(t - x/c_1)$; функция $Q(x,t)$ имеет разрывы при $t = x/c_1$ и $t = x/c_2$.

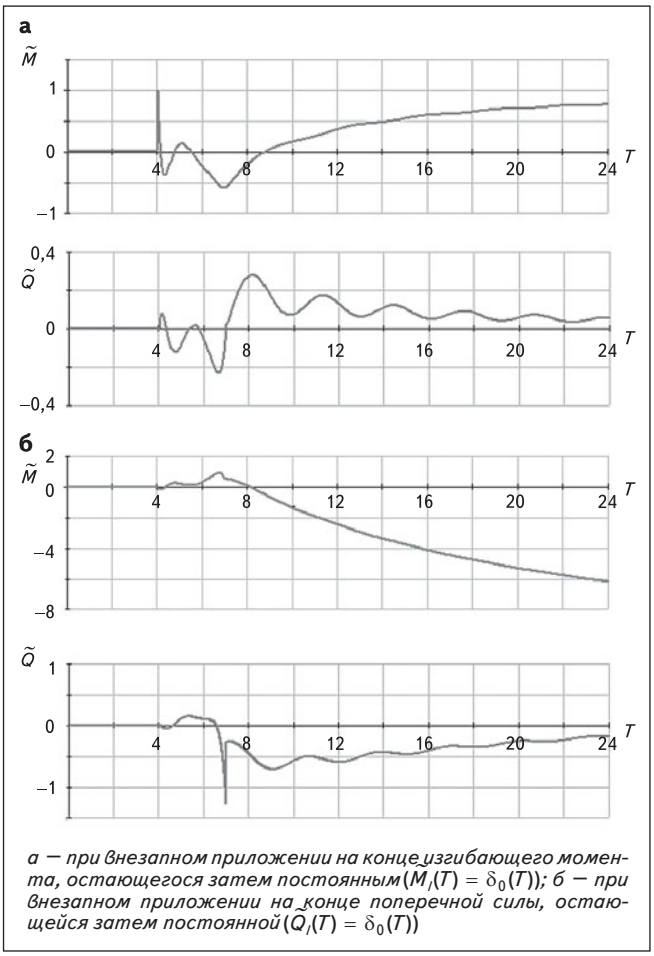
Графики изменения во времени усилий при $v = 1{,}75$ в сечении $\eta = 4$ приведены при следующих воздействиях специального вида:

• $w_0(t) = c_1t$ ($\tilde{w}_0(T) = T$) — концу стержня внезапно сообщается скорость, остающаяся затем постоянной *(рис. 2а)*;

• $M_0(t) = \frac{EJ_b}{h}\delta_0(t)$ ($\tilde{M}_0(T) = \delta_0(T)$) — на конце стержня внезапно приложен изгибающий момент, остающийся затем постоянным *(рис. 2б)*.

3.3. Задача II_0

Функции $w(x,t)$ и $\psi(x,t)$ непрерывны. Формулы для функций влияния даны в *табл. 6*, для функций



а – при внезапном приложении на конце изгибающего момента, остающегося затем постоянным ($M_l(T) = \delta_0(T)$); б – при внезапном приложении на конце поперечной силы, остающейся затем постоянной ($Q_l(T) = \delta_0(T)$)

Рис. 4. ***Задача III$_l$: конец полубесконечного стержня ($-\infty < \eta \leqslant l/h$) свободен. Изменение во времени усилий в сечении $\eta_l = 4$ при $v = 1{,}75$***

усилий – в *табл. 7*, из которой следует, что функция $M(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_1$, если $\dot{\psi}_0(0) \neq 0$, а функция $Q(x,t)$ имеет разрыв при $t = x/c_2$, если $\dot{w}_0(0) \neq 0$.

Графики изменения во времени усилий при $v = 1{,}75$ в сечении $\eta = 4$ приведены при следующих воздействиях специального вида:

- $w_0(t) = c_1 t$ ($\tilde{w}_0(T) = T$) – концу стержня внезапно сообщается линейная скорость, остающаяся затем постоянной *(рис. 3а);*
- $\psi_0(t) = c_1 t/h$ ($\tilde{\psi}_0(T) = T$) – концу стержня внезапно сообщается угловая скорость, остающаяся затем постоянной *(рис. 3б).*

3.4. Задача III$_l$

Функции $w(x,t)$ и $\psi(x,t)$ непрерывны. Формулы для функций влияния даны в *табл. 8*, для усилий – в *табл. 9*, из которой следует, что функция $M(x,t)$ имеет разрыв при $t = (l-x)/c_1$, если $M_l(0) \neq 0$, а функция $Q(x,t)$ имеет разрыв при $t = (l-x)/c_2$, если $Q_l(0) \neq 0$.

Если заданное моментное воздействие является импульсным, то $M_l(t) = R_M \delta_1(t)$, где R_M = const. Тогда функция $w(x,t)$ непрерывна, функция $\psi(x,t)$ имеет разрыв при $t = (l-x)/c_1$. Из табл. 9 следует: функция $M(x,t)$ будет содержать особенность типа импульсивной функции $R_M \delta_1[t-(l-x)/c_1]$, а функция $Q(x,t)$ имеет разрывы при $t = (l-x)/c_1$ и $t = (l-x)/c_2$.

Если заданная поперечная сила является импульсной, то $Q_l(t) = R_Q \delta_1(t)$, где R_Q = const. Тогда функция $w(x,t)$ имеет разрыв при $t = (l-x)/c_2$, а функция $\psi(x,t)$ непрерывна. Из *табл. 9* следует: функция $Q(x,t)$ будет содержать особенность типа импульсивной функции $R_Q \delta_1[t-(l-x)/c_2]$, функция $M(x,t)$ имеет разрывы при $t = (l-x)/c_1$ и $t = (l-x)/c_2$.

Графики изменения во времени усилий при $v = 1{,}75$ в сечении $\eta_l = 4$ приведены при следующих воздействиях специального вида:

- $M_l(t) = \dfrac{EJ_b}{h}\delta_0(t)$ ($\tilde{M}_l(T) = \delta_0(T)$) – на конце стержня внезапно приложен изгибающий момент, остающийся затем постоянным *(рис. 4а);*
- $Q_l(t) = k'A_b G\,\delta_0(t)$ ($\tilde{Q}_l(T) = \delta_0(T)$) – на конце стержня внезапно приложена поперечная сила, остающаяся затем постоянной *(рис. 4б).*

Отметим, что полученные решения для полубесконечных стержней позволяют также находить точные решения в виде бегущих волн для стержней **конечной** длины при различных граничных условиях.

Выводы

1. Приведены **точные аналитические** решения нестационарных задач теории С. П. Тимошенко для различных типов полубесконечных стержней, а также решения вспомогательной задачи для бесконечного стержня.

2. Формулы для определения усилий представлены в **общем виде**, в **бегущих волнах**. Формы представления решений физически наглядны и удобны для практических расчетов. Такие решения необходимы для исследования переходных волновых процессов деформации в стержнях при поперечных кратковременных и быстроизменяющихся воздействиях.

3. Исследовано наличие разрывов в решениях. Особо рассмотрен случай, когда силовые воздействия являются импульсными.

4. В качестве иллюстрации даны графики изменения во времени усилий в стержнях, вычисленных по приведенным формулам при воздействиях специального вида.

5. Результаты работы можно использовать в практике расчета зданий и сооружений на действие

ударных и взрывных нагрузок, при уточненной оценке параметров колебаний, возбуждаемых промышленными источниками вибрации и транспортными средствами и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М. : Изд-во иностранной литературы, 1955. 192 с.
2. *Зоненберг А.Л.* Новые операционные соотношения и их применение к решению нестационарных задач для стержней на основе теории С. П. Тимошенко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 62–75.
3. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.
4. *Слепян Л. И., Яковлев Ю. С.* Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. Л. : Судостроение, 1980. 344 с.
5. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 272 с.
6. *Селезов И. Т.* О развитии теории Тимошенко поперечных колебаний упругих стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 1. С. 16-23.
7. *Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching.* Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods [Теоретический анализ переходных волн в свободно опертом стержне Тимошенко методами бегущих и стоячих волн] // International Journal of Solids and Structures. 2011. Vol. 48. No. 3-4. Pp. 535–552.
8. *Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching.* Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods [Анализ переходных волн в консольном стержне Тимошенко, подвергнутом ударному нагружению, методами преобразования Лапласа и стоячих волн] // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. No. 9. Pp. 1158–1176.
9. *Wang X. Q., So R. M. C.* Timoshenko beam theory: a perspective based on the wave-mechanics approach [Теория стержня Тимошенко: исследование с точки зрения волновой механики] // Wave Motion. 2015. Vol. 57. Pp. 64–87.
10. *Абрамян А. К., Индейцев Д. А., Постнов В. А.* Бегущие и стоячие волны балки Тимошенко // Известия РАН. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 101–109.
11. *Leonard R.W., Budiansky B.* On traveling waves in beams [Бегущие волны в стержнях] // NACA Repts. 1954. No. 1173. Pp. 389–415.
12. *Dengler M. A.* Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung [Поперечные волны в стержнях и пластинах при нагрузке ударного типа] // Österr. Ingenieur-Archiv. 1956. Vol. 10. No. 1. Pp. 39–66.
13. *Flügge W., Zajac E.E.* Bending impact waves in beams [Изгибные волны в стержнях при ударных воздействиях] // Ingenieur-Archiv. 1959. Vol. 28. Iss. 1. Pp. 59–70.
14. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М. – Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 432 с.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. 799 с.
16. *Диткин В. А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М. : Высш. школа, 1965. 468 с.
17. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. М.: Высш. школа, 1966. 408 с.
18. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965. 288 с.
19. *Эфрос А.М., Данилевский А.М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во, 1937. 383 с.

REFERENCES

1. Kolsky H. *Volny napryazheniya v tverdyh telah* [Stress waves in solids]. Moscow, Izd-vo inostrannoy literatury Publ.,1955. 192 p. (In Russian).
2. Zonenberg A. L. New operational ratios and their application to non-stationary tasks for rods based on S. P. Timoshenko theory. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*, 2020, vol.16, no. 1, pp. 62–75. (In Russian).
3. Timoshenko S. P. *Kurs teorii uprugosti* [Course in the theory of elasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1972. 508 p. (In Russian).
4. Slepyan L. I., Yakovlev Yu. S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestacionarnyh zadachah mekhaniki* [Integral transformations in non-stationary problems of mechanics]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1980. 344 p. (In Russian).
5. Grigolyuk E. I., Selezov I. T. Nonclassical theories of vibrations of bars, plates and shells. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Mekhanika tverdyh deformiruemyh tel* [Advances in sciences and engineering. Mechanics of deforming solids]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p. (In Russian).
6. Selezov I. T. On the development of the Timoshenko theory of transversal oscillations of elastic rods. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2016, no. 1, pp. 16–23. (In Russian).
7. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Theoretical analysis of transient waves in a simply-supported Timoshenko beam by ray and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 48, no. 3–4, pp. 535–552.
8. Su Yu-Chi, Ma Chien-Ching. Transient wave analysis of

a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, no. 9, pp. 1158–1176.

9. Wang X. Q., So R. M. C. Timoshenko beam theory: A perspective based on the wave-mechanics approach. *Wave Motion*, 2015, vol. 57, pp. 64–87.
10. Abramyan A. K., Indeitsev D. A., Postnov V. A. Running and standing waves of Timoshenko beam. *Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela*, 2018, no. 2, pp. 101--109. (In Russian).
11. Leonard R. W., Budiansky B. On traveling waves in beams. *NACA Repts*, 1954, no. 1173, pp. 389–415.
12. Dengler M. A. Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stoßförmiger Belastung. *Österr. Ingenieur-Archiv*, 1956, vol. 10, no. 1, pp. 39–66.
13. Flügge W., Zajac E. E. Bending impact waves in beams. *Ingenieur-Archiv*,1959, vol. 28, iss. 1, pp. 59–70.
14. Lurie A. I. *Operacionnoe ischislenie i ego prilozheniya k zadacham mekhaniki* [Operational calculus and its application to the problems in mechanics]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 432 p. (In Russian).
15. Watson G. N. *Teoriya besselevyh funkcij* [A treatise on the theory of Bessel functions]. Part 1. Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1949. 799 p. (In Russian).
16. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculations]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965. 468 p. (In Russian).
17. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operacionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1966. 408 p. (In Russian).
18. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa* [Guide to the applications of laplace transforms]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 288 p. (In Russian).
19. Efros A. M., Danilevsky A. M. *Operacionnoe ischislenie i konturnye integraly* [Operational calculus and contour integrals]. Kharkiv, Gosudarstvennoe nauchno-tekhnicheskoe izdatelstvo Publ., 1937. 383 p. (In Russian).

Для цитирования: *Зоненберг А. Л.* Точные аналитические решения нестационарных задач для стержней на основе теории С. П. Тимошенко // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 7. С. 16–25. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.07.16-25.

For citation: Zonenberg A. L. Exact Analytical Solutions to Non-Stationary Problems for Rods Based on S. P. Timoshenko Theory. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2020, no. 7, pp. 16–25. (In Russian). DOI: 10.33622/0869-7019.2020.07.16-25.