

О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения

Борис Владимирович ГУСЕВ, доктор технических наук, профессор, член-кор. РАН, e-mail: info-rae@mail.ru
ФГБОУ ВО «Российский университет транспорта (МИИТ)», 127994 Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9

Василий Васильевич САУРИН, доктор физико-математических наук, ведущий сотрудник, e-mail: saurin@pmnet.ru
ФГБУН «Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук»,
119526 Москва, просп. Вернадского, 101, кор. 1

Аннотация. Работа состоит из введения и трех разделов. Во введении обсуждается актуальность вопросов, связанных с изучением колебаний неоднородных балок. Проводится анализ публикаций и полученных результатов в данной области. Первый раздел посвящен формулировке краевой задачи нахождения собственных частот неоднородной балки в рамках гипотез Эйлера–Бернулли. Введем новых переменных задача, сформулированная в перемещениях, сводится к идентичной, но сформулированной в терминах изгибающего момента. В следующем разделе описывается метод интегродифференциальных соотношений, который является альтернативным классическим вариационным подходом. Далее исследуются возможности построения различных двусторонних энергетических оценок качества приближенных решений, вытекающих из метода интегродифференциальных соотношений. В третьем разделе, на примере свободных колебаний опертой бетонной балки, исследуются численные аспекты построения приближенного решения краевых задач, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Предложенные двусторонние критерии качества приближенного решения позволяют получать высокоточные решения для математических моделей малой размерности.

Ключевые слова: динамика, балка переменного сечения, собственные колебания, численные методы, структурная неоднородность, метод конечного элемента, функционально градуированные материалы.

ON FREE BENDING VIBRATIONS OF CONCRETE BEAMS WITH VARIABLE CROSS SECTION

Boris V. GUSEV, e-mail: info-rae@mail.ru

Russian University of Transport, Obraztsova, 9, str. 9, Moscow 127994, Russian Federation

Vasily V. SAURIN, e-mail: saurin@pmnet.ru

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, prosp. Vernadskogo, 101, kor. 1, Moscow 119526, Russian Federation

Abstract. The paper consists of an introduction and three sections. The introduction discusses the relevance of issues related to the study of inhomogeneous beams vibrations. The analysis of publications and the results obtained in this area is performed. The first section is devoted to the formulation of the boundary-value problem of finding natural-vibration frequencies for an inhomogeneous beam under the Euler-Bernoulli hypotheses. By introducing new variables, the problem originally formulated in displacements reduces to an identical one, but formulated in terms of bending moment. The next section describes the method of integro-differential relations, which is an alternative to the classical variational approaches. Further, the possibilities of constructing various bilateral energy estimates of the quality of approximate solutions arising from the method of integro-differential relations are investigated. In the third section, using the example of free vibrations of a supported concrete beam, numerical aspects of constructing an approximate solution for boundary problems described by an ordinary differential equation with variable coefficients are studied. The proposed bilateral quality criteria of the approximate solution make it possible to obtain high-precision solutions for mathematical models of small dimension.

Key words: dynamics, beam of variable cross-section, self-excited vibrations, numerical methods, structural heterogeneity, finite element method, functionally graded materials.

Введение

Многие балки, применяемые в технике и строительстве, характеризуются переменными геометрическими и физическими параметрами. Типичным случаем является коническая балка. Кроме того, например, балка при неравномерном распределении темпе-

ратуры имеет переменные физические свойства. Наличие переменных параметров значительно затрудняет динамический анализ таких объектов.

Изучение динамики конструкций в настоящее время становится все более важным для инженеров-строителей, поскольку совре-

менные многоэтажные сооружения являются относительно более гибкими. Такая тенденция в строительстве, как правило, приводит к увеличению амплитуд колебаний зданий. Поэтому в некоторых случаях необходимо рассчитать динамические характеристики высотных конструкций уже на этапе

проектирования. При анализе свободных колебаний консольных высотных зданий их можно моделировать, в первом приближении, балками с переменным поперечным сечением.

В течение последних нескольких десятилетий значительное количество публикаций, представляющих либо аналитические, либо численные решения, были посвящены поперечным колебаниям неоднородных балок и равномерно вращающихся балок. Характерная черта управляющих дифференциальных уравнений поперечных колебаний неоднородных балок состоит в том, что они представляют собой линейные уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Поперечные колебания неоднородных балок изучались многими исследователями вследствие их значимости для гражданского строительства. Эти исследования представляют из себя либо аналитические [1–4], либо приближенные решения [5].

Среди результатов, представленных в литературе, точные решения в замкнутой форме представляют особый интерес из-за того, что они служат критериями, по которым можно оценить точность различных приближенных решений, полученных с помощью методов Релея–Ритца, Бубнова–Галеркина, конечных разностей, конечных элементов, дифференциальных квадратур и др. [6]. Кроме того, они служат тестовой базой для разработки новых систем численного решения краевых задач.

В прошлом было проведено много исследований свободных колебаний неоднородных балок. Однако решения в замкнутой форме до сих пор получены для малого числа задач. Показано, что аналитические решения можно найти для некоторых особых случаев, например, как структуры с экспоненциально изменяю-

щимся поперечным сечением. Обычно для построения решения применяют различные численные методы, такие как метод конечных элементов, метод конечных разностей и т. д.

Большинство рассмотренных задач относятся к исследованию поперечных колебаний сужающихся балок. Эти результаты можно систематизировать следующим образом: балки с круглым поперечным сечением либо усеченные [1], имеющие один острый конец либо два острых конца [7]; балки с прямоугольным поперечным сечением и с постоянной шириной, с постоянной толщиной [4] или пирамидой [1].

Интерес исследователей к задачам о колебаниях неоднородных одномерных структур в первую очередь связан с исследованием [8] конических стержней, показывающим, что собственные частоты слабо зависят от конуса. Исследование конических стержней важно для изучения основ и динамики композитных структур, подверженных высокоскоростному удару. В этих случаях динамический отклик полуплоскости на поверхностную нагрузку можно точно определить с использованием конической модели. Более детальный обзор методов решения задач о колебаниях балок переменного сечения можно найти в [9].

Несмотря на то, что задачи о свободных колебаниях стержней переменного сечения давно известны и довольно подробно исследованы, остается ряд вопросов, актуальных и в наше время, а именно: разработка более эффективных численных методов, построение надежных процедур оценки качества приближенных решений и др. Некоторым из таких вопросов и посвящено данное исследование.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую балку длиной L , которая может быть

описана уравнениями в рамках гипотез Эйлера–Бернулли. Плоские поперечные движения балки описываются линейным уравнением в частных производных

$$\rho(x)y_{tt} + (EJ(x)t_{xx})_{xx} = q(x, t) \quad (1)$$

$$x \in (0, L),$$

где y – поперечные перемещения точек центральной линии балки, м; ρ – линейная плотность материала балки, кг/м; E – модуль Юнга; $q(x, t)$ – внешняя распределенная нагрузка, Н/м; $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения, м⁴. Без потери общности будем считать, что внешняя распределенная нагрузка отсутствует, т. е. $q(x, t) = 0$.

Введем новые переменные $\rho(x, t)$ и $m(t, x)$, которые характеризуют поведение системы и, в то же самое время, имеют ясный физический смысл. Функция $\rho(x, t)$ является линейной плотностью импульса, а $m(t, x)$ – изгибающим моментом в поперечном сечении балки.

Уравнения линейной теории, связывающие плотность импульса $\rho(x, t)$ со скоростями точек системы $y_t(x, t)$, а также момент $m(t, x)$ с кривизной балки $y_{xx}(x, t)$, вызванной изгибом, могут быть соответственно записаны в виде

$$\eta = 0; \quad \xi = 0. \quad (2)$$

Здесь введены вспомогательные функции η и ξ :

$$\eta = y_t - \frac{\rho}{\rho}; \quad \xi = y_{xx} - \frac{m}{EJ}. \quad (3)$$

Используя соотношения (2), уравнение движения упругой балки (1), записанное в перемещениях, можно выразить через функции момента $m(t, x)$ и импульса $\rho(x, t)$:

$$\rho_t + m_{xx} = 0. \quad (4)$$

Поскольку выражение (4) связывает распределенные инерционные, упругие и внешние силы, то это соотношение будем называть уравнением динамического равновесия.

Для того чтобы сформулиро-

вать задачу нахождения собственных частот колебаний балки, представим все введенные функции, которые зависят от времени, в виде:

$$y(x, t) = \tilde{y}(x)e^{i\omega t}; \quad (5)$$

$$\rho(x, t) = \tilde{\rho}(x)e^{i\omega t}; \quad m(x, t) = \tilde{m}(x)e^{i\omega t};$$

$$\eta(x, t) = \tilde{\eta}(x)e^{i\omega t}; \quad \xi(x, t) = \tilde{\xi}(x)e^{i\omega t}.$$

Подставляя функции из выражений (5) соответственно в выражения (2), (3) и (4), получим:

$$i\omega t - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} = 0; \quad \tilde{y}_{xx} - \frac{\tilde{m}}{EJ} = 0; \quad (6)$$

$$\tilde{\eta} = i\omega t - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}; \quad \tilde{\xi} = \tilde{y}_{xx} - \frac{\tilde{m}}{EJ}; \quad (7)$$

$$i\omega \tilde{\rho} + \tilde{m}_{xx} = 0. \quad (8)$$

В дальнейшем знак тильды опускается.

Из первого уравнения (6) и соотношения (8) можно получить в явном виде выражение для функции перемещений y относительно изгибающего момента:

$$y = \frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2}, \quad (9)$$

а из соотношения (8) получается выражение для функции импульсов относительно изгибающего момента:

$$\rho = -\frac{m_{xx}}{i\omega}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (9) во второе уравнение из (6), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами для нахождения собственных частот колебаний балки:

$$\left(\frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2} \right)_{xx} - \frac{m}{EJ(x)} = 0. \quad (11)$$

Как видим, при таком выборе переменных первое соотношение из уравнений (6) выполняется как тождество, а уравнение (11) представляет собой модификацию второго соотношения из (6) и, соответственно, не равно нулю на приближенном решении.

В данной работе ограничимся рассмотрением случая простого

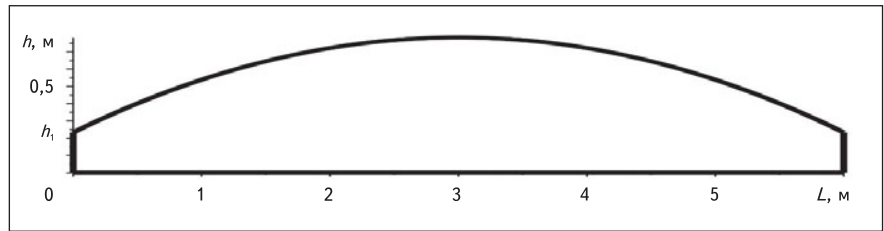


Рис. 1. Балка переменного сечения

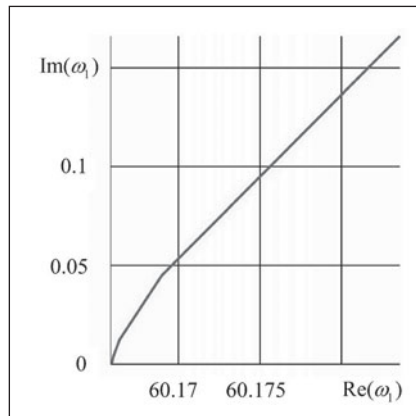


Рис. 2. Действительные и мнимые части первой собственной частоты балки для различных полиномиальных приближений

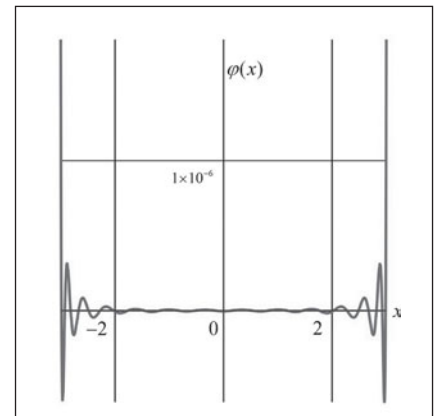


Рис. 3. Распределение локальной ошибки $\varphi(x)$ по длине балки для первой формы собственных колебаний

опирания, когда отсутствуют перемещения и внешние моменты в торцевых сечениях стержня. Другими словами, линейные граничные условия выражаются через крайние значения функций момента m и перемещения y в виде:

$$x = 0, m = 0, y = 0; \quad (12)$$

$$x = 1, m = 0, y = 0.$$

Используя соотношение (9), граничные условия (12) можно записать в терминах изгибающего момента:

$$x = 0, m = 0, m_{xx} = 0; \quad (13)$$

$$x = 1, m = 0, m_{xx} = 0.$$

2. Метод интегродифференциальных соотношений

В предлагаемом подходе вместо уравнений состояния балки (2) вводится в рассмотрение одно интегральное соотношение, связывающее функции импульса ρ и момента m с функцией перемещений y .

В книге [11] дана следующая интегродифференциальная формулировка задачи о движении упругой балки (6)–(12): найти такие неизвестные поля плотности импульса ρ^* , момента m^* и перемещений y^* , которые удовлетворяют интегральному соотношению

$$\Phi = \int \varphi(\rho, m, y) d\Omega = 0, \quad (14)$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(\rho\eta^2 + EJ\xi^2)$$

при строгом выполнении условий (8), (12). Здесь введена пространственно-временная область $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$ с границей $\partial\Omega$ в пространстве координаты x и времени t . Интеграл (14) вычисляется по прямоугольной области Ω ($\partial\Omega = dxdt$).

Подынтегральная функция, определенная в (14) через функции η и ξ из (7), является неотрицательной по построению. Из этого свойства следует, что интеграл Φ также неотрицателен для произвольных функций ρ , m и y . Это обстоятельство позволяет

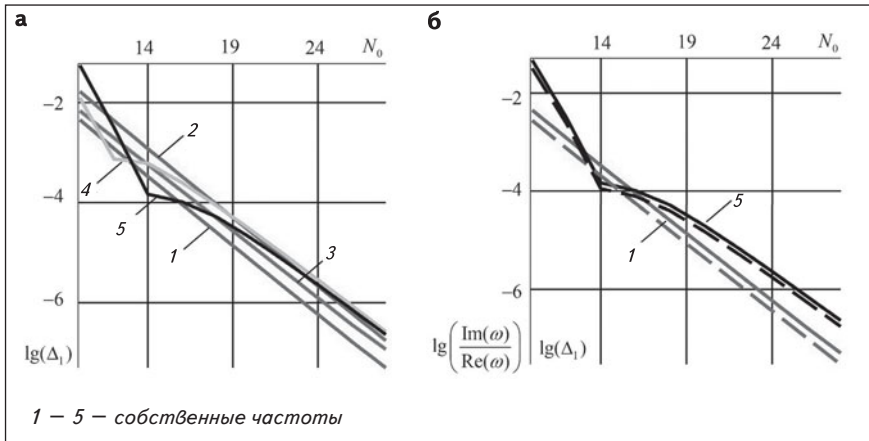


Рис. 4. Сходимость пяти первых собственных частот (а) и первой собственной частот (б) относительно числа степеней свободы

свести интегродифференциальную задачу (6), (8), (12), (14) к следующей минимизационной: найти такие допустимые функции p^* , m^* и y^* , которые доставляют минимальное (нулевое) значение функционалу Φ

$$\Phi = \min_{p, m, y} \Phi(p, m, y) = 0 \quad (15)$$

при строгом выполнении ограничений (6), (8) и (12).

Функционал Φ можно переписать в следующем виде:

$$\Phi = \Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_3; \quad (16)$$

$$\Psi_i = \int_{\Omega} \psi_i(p, m, y) d\Omega, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(-\rho\omega^2 y^2 + EJy_{xx}^2);$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(i\omega p y + m y_{xx});$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\rho} + \frac{m^2}{EJ}\right).$$

Подынтегральные выражения ψ_i ($i = 1, 2, 3$) представляют собой различные представления линейной плотности полной механической энергии упругой балки. Функция ψ_1 зависит только от поперечных перемещений y , в то время как в выражение для ψ_3 , квадратичное по ρ и m , перемещения не входят. Смешанная билинейная функция плотности энергии ψ_2 не зависит явно от инерционных и упругих свойств балки.

Используя функционал Φ и энергетические интегралы Ψ_i ($i = 1, 2, 3$), введенные в (16), для произвольных допустимых полей импульсов p , моментов m и перемещений y , удовлетворяющих ограничениям (12), можно сформулировать ряд критериев, характеризующих совершенство приближенного решения. Например, интегральное качество приближенных функций p, m, y достоверно оценивается в соответствии с величиной безразмерного соотношения

$$\Delta_1 = \sqrt{\frac{\Psi_1 + \Psi_3}{2\Psi_2} - 1}. \quad (17)$$

Точность распределения энергии для некоторого допустимого движения $p(x, t), m(x, t), y(x, t)$ в области Ω характеризует подынтегральная функция $\phi(p, m, y)$, определенная в (14).

3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим различные железобетонные балки со следующими геометрическими характеристиками. Все балки имеют одинаковую длину $L = 6$ м и прямоугольное поперечное сечение с шириной $b = 0,3$ м = const и высотой $h = h(x)$, которая меняется по длине балки:

$$h(x) = \left(\frac{h_1}{6} - \frac{1}{10}\right)x^2 + \frac{9}{10} - \frac{h_1}{2}. \quad (18)$$

Здесь управляющий параметр h_1 , который может изменяться в следующих пределах $0 \leq h_1 \leq 0,6$ м, представляет собой значения строительной высоты на концах балки $h(0) = h(L) = h_1$. Из (18) следует, что все рассматриваемые балки имеют одинаковый объем конструкционного материала

$$V = 1,08 \text{ м}^3. \quad (19)$$

Отметим, что форма сечения балки не меняется по длине, если $h(x) = h_1 = 0,6$ м = const. Момент инерции сечения вычисляется по формуле

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h^2(x)S(x)}{12}; \quad (20)$$

$$S(x) = bh(x),$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения, м². Балка с такими параметрами показана на рис. 1.

Считается, что все балки выполнены из бетона тяжелого класса по прочности при сжатии В25 с модулем упругости $E = E_{25} = 3000$ МПа и погонной плотностью $\rho(x) = \rho_V bh(x)$, где $\rho_V = 2300$ кг/м³ — объемная плотность бетона. Все механические характеристики взяты из СП 41.13330.2012 «СНиП 2.06.08-87 Бетонные и железобетонные конструкции гидротехнических сооружений». Граничные условия на концах балки задаются формулой (13).

Собственные частоты были найдены с использованием вариационных подходов, обсуждаемых в этой статье. Следует отметить, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, вытекающие из вариационных принципов, имеют переменные коэффициенты. Это, как указано в [10], значительно ограничивает возможности построения аналитических решений и проведения полного анализа естественных движений балки переменного сечения.

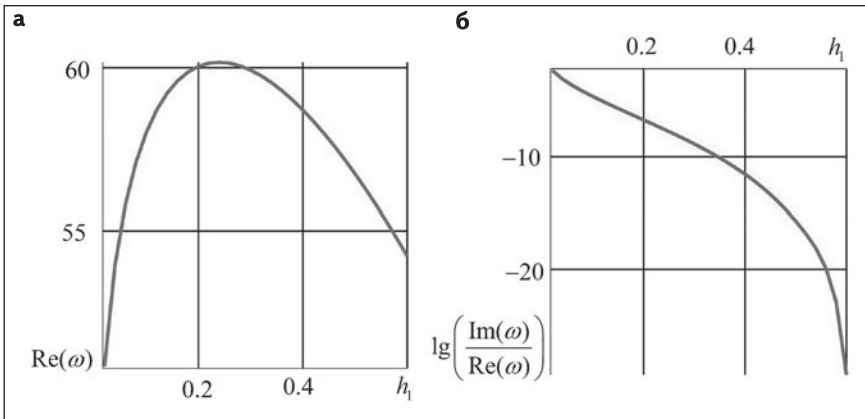


Рис. 5. Зависимости значений первой собственной частоты (а) и параметра точности решения $\lg(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega))$ (б) относительно параметра h_1

Чтобы найти приближенное решение краевой задачи (11), (13), зададим аппроксимации неизвестных функций моментов m в виде полиномов относительно переменной x :

$$m = \sum_{i=1}^{N_0} m_i x^i, \quad (21)$$

где m_i – неизвестные константы; N_0 – степень полиномов.

Используя аппроксимации (21), можно точно удовлетворить граничные условия (13). Эта операция позволяет исключить четыре константы m_i . Оставшиеся $N_d = N - 4$ коэффициентов m_i , $i = 1, \dots, N_d$ используются для нахождения минимума следующего квадратичного функционала:

$$\Phi_0 = \min_{y_i} (\Phi_0) > 0, \quad (22)$$

$$\Phi_0 = \int_0^L EJ \xi^2 dx = \int_0^L \left[\left(\frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2} \right)_{xx} - \frac{m}{EJ(x)} \right]^2 dx, \quad i = 1, \dots, N_d$$

Вариационная формулировка (22) полностью соответствует методу наименьших квадратов.

Стоит также отметить, что применение вариационной техники в такой задаче приводит к появлению комплексных собственных значений. Можно показать (см., например, [10]), что действитель-

ные собственные частоты приближенного спектра соответствуют точным значениям частот. На рис. 2 показано поведение первого комплексного собственного значения в зависимости от степени аппроксимации N_0 . Увеличение этого параметра приводит к значительному уменьшению мнимой части. Видно, что линия, соответствующая приближенным собственным частотам, вертикально втыкается в вещественную ось. Поэтому угол наклона частотной линии и расстояние до действительной оси могут служить специальным видом оценки качества полученных частот. В расчетах параметр N_0 менялся от 10 до 28.

Функция $\varphi(x)$, введенная в уравнении (14), которая в данном случае имеет вид

$$\varphi(x) = \left(\frac{m_{xx}}{\rho(x)\omega^2} \right)_{xx} - \frac{m}{EJ(x)}, \quad (23)$$

представлена на рис. 3 для первой моды колебаний при $N_0 = 28$. Можно отметить заметное биение функции, а также значительный ее рост в окрестностях концов балки.

На рис. 4а показана характерная сходимость пяти первых собственных частот (кривые отмечены соответствующими номерами) относительно числа степеней свободы.

Значения параметра Δ_1 приведены в логарифмическом масштабе. Можно отметить довольно быструю сходимость (экспоненциальную). Все линии линейно убывают с ростом числа степеней свободы.

На рис. 4б представлены в логарифмическом масштабе зависимости интеграла Δ_1 , введенного соотношением (17), от степени аппроксимации N_0 для первой и пятой собственных частот (сплошные линии). Для сравнения пунктирными линиями показано изменение в логарифмическом масштабе положительного параметра $\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega)$ от степени аппроксимации N_0 для первой и пятой собственных частот. Из вида представленных зависимостей следует, что они качественно повторяют одна другую. Можно отметить некоторый сдвиг между соответствующими кривыми по вертикали. Сравнительный анализ значений комплексной и относительных погрешностей позволяет сделать предположение, что справедливо следующее соотношение:

$$\left| \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \right| \approx \sqrt{\frac{\Psi_1(\omega) + \Psi_3(\omega)}{2\Psi_2(\omega)} - 1}. \quad (24)$$

Другими словами, отношение мнимой и действительной частей собственной частоты довольно точно соответствует относительной энергетической погрешности Δ_1 .

На рис. 5а показана зависимость первой собственной частоты для балок переменного сечения, характеризующихся параметром h_1 . Важно отметить, что существует ярко выраженный максимум у представленной кривой $\omega = 60,166$ Гц при $h_1 = 0,24$. При этом отличие максимальной частоты от значения первой частоты балки постоянного сечения ($\omega_1 = 50,839$ Гц при $h_1 = 0,6$) составляет 18,35 %. На рис. 5б представлены значения энергетической ошибки $\lg(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega))$ в

логарифмическом масштабе для различных значений строительной высоты h_1 на конце балки. Из данной зависимости видно, что минимальная погрешность реализуется для балки постоянного сечения и для этой модели составляет менее 10^{-26} (практически точное решение). С уменьшением значения параметра h_1 погрешность быстро нарастает. Так, при $h_1 = 0,02$ (предельное значение для данной модели) энергетическая ошибка достигает 0,0052.

Выводы

1. Разработан регулярный вариационный подход нахождения собственных частот и форм ко-

лебаний неоднородных балок путем сведения краевой задачи по времени к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

2. Изучены и обсуждены свойства квадратичных соотношений и их значение для решения различных спектральных задач. В качестве примера представлены интегродифференциальные формулировки задачи о свободных колебаниях балки с квадратично меняющейся по ее длине строительной высотой. Построены оптимальные формы бетонных балок с максимальной первой собственной частотой. Показано, что предложенные двусто-

ронные критерии качества приближенного решения позволяют получать высокоточные решения для математических моделей малой размерности.

3. В будущих работах авторы планируют уделить внимание разработке эффективных численных стратегий и процедур построения достоверных решений методом конечных элементов с использованием разработанной вариационной техники на основе метода интегродифференциальных соотношений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-191-01247).

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

- Rosa M. A. De, Auciello N. M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends [Свободные колебания конических балок с гибкими концами]. *Computers & Structures*, 1996, vol. 60, no 2, pp. 197–202.
- Cranch E. T., Adler A. Bending vibrations of variable section beams [Изгибные колебания балок переменного сечения]. *American Society of Mechanical Engineers*, 1956, vol. 23, no. 1, pp. 103–108.
- Caruntu D. I. On nonlinear vibration of nonuniform beam with rectangular cross-section and parabolic thickness variation [О нелинейных колебаниях неоднородной балки с прямоугольным поперечным сечением и параболическим изменением толщины]. *Solid Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 73, pp. 109–118.
- Chaudhari T. D., Maiti S. K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack [Моделирование поперечных колебаний балки линейно изменяемой толщины с краевой трещиной]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, vol. 63, pp. 425–445.
- Auciello N. M. On the transverse vibrations of nonuniform beams with axial loads and elastically restrained ends [О поперечных колебаниях неоднородных балок с осевыми нагрузками и упругоограниченными концами]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43, pp. 193–208.
- Elishakoff I. Eigenvalues of inhomogeneous structures: unusual closed-form solutions [Собственные значения неоднородных структур: необычные замкнутые решения]. Boca Raton, FL: CRC Press, 2005.
- Jang S. K., Bert C. W. Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions [Свободная вибрация ступенчатых балок: точные и численные решения]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, vol. 130, pp. 342–346.
- Eisenberger M. Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod [Точные частоты продольных колебаний стержня переменного сечения]. *Applied Acoustics*, 1991, vol. 34, pp. 123–130.
- Гусев Б. В., Саурин В. В. О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312 (дата обращения: 21.07.2019).
- Gusev B. V., Saurin V. V. On vibrations of inhomogeneous beams. *Inzhenernyj vestnik Dona*, 2017, no. 3. Available at: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312 (accessed 21.07.2019). (In Russian).
- Kostin G. V., Saurin V. V. Integrodifferential relations in linear elasticity [Интегродифференциальные отношения в линейной упругости]. Berlin, De Gruyter, 2012. 280 p.
- Kostin G. V., Saurin V. V. Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations [Динамика твердых структур. Метод с использованием интегродифференциальных отношений]. Berlin, De Gruyter, 2017. 305 p.

Для цитирования: Гусев Б. В., Саурин В. В. О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения // Промышленное и гражданское строительство. 2019. № 8. С. 93–98. DOI: 10.33622/0869-7019.2019.08.93-98.

For citation: Gusev B. V., Saurin V. V. On Free Bending Vibrations of Concrete Beams with Variable Cross Section. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2019, no. 8, pp. 93–98. (In Russian). DOI: 10.33622/0869-7019.2019.08.93-98. ■