

УДК 351.777.8.001.57

## Математическая модель динамики и взаимовлияния внешнего и внутреннего направлений в деятельности биосферосовместимого города

**Вячеслав Александрович ИЛЬЧИЁВ**, академик РААСН, доктор технических наук, профессор, первый вице-президент РААСН

Российская академия архитектуры и строительных наук (РААСН), 107031 Москва, ул. Большая Дмитровка, 24, e-mail: raasn@raasn.ru

**Виталий Иванович КОЛЧУНОВ**, академик РААСН, доктор технических наук, профессор

ФГБОУ ВПО «Юго-Западный государственный университет», 305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94, e-mail: yz\_swsu@mail.ru

**Владимир Александрович ГОРДОН**, советник РААСН, доктор технических наук, профессор,

e-mail: gordon@ostu.ru

ФГБОУ ВПО «Госуниверситет-УНПК», 302020 г. Орел, Наугорское ш., 29

**Аннотация.** В качестве внешнего направления деятельности города рассматривается изъятие ресурсов из биосферы и вбрасывание в нее отходов, загрязняющих воду, воздух, почву и др.; в качестве внутреннего – воздействие на население (состояние окружающей среды, оценка здоровья, продолжительность жизни, человеческий потенциал и др.).

Метод прогнозирования эколого-демографической ситуации урбанизированной территории строится с помощью относительно простой, нелинейной имитационной модели, отражающей взаимодействие нескольких подсистем, таких как население, загрязнение атмосферы и водоемов.

**Ключевые слова:** биосферосовместимый город, загрязнение воздуха и водоемов, население, имитационная модель, система дифференциальных уравнений, прогнозирование состояния окружающей среды.

### MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS AND INTERFERENCE OF EXTERNAL AND INTERNAL DIRECTIONS IN ACTIVITY OF A BIOSPHERE COMPATIBLE CITY

Vyacheslav A. IL'ICHEV, Vitaly I. KOLCHUNOV, Vladimir A. GORDON

**Abstract.** The withdrawal of resources from the biosphere and dispersion into it the waste polluting the water, air, soil etc. is considered as the external direction of the city activity; impact on the population (natural environment conditions, assessment of health, life time, human potential etc.) is considered as the internal one. A method of predicting the ecological and demographic situation on the urbanized territory is constructed with the use of the relatively simple, non-linear, simulation model that reflects the interaction of several subsystems such as population, pollution of air and water bodies.

**Key words:** biosphere compatible city, air and water bodies pollution, population, simulation model, system of differential equations, predicting the state of the environment.

Демографические тенденции в России имеют кризисный характер и вызваны разнообразными факторами – историческими, социальными, экономическими, экологическими и др. Начиная с 1990 г. в стране идет процесс убыли населения: его численность сократилась со 148,3 млн чел. в 1990 г. до 143 млн чел в 2011 г. [1].

Как показывают статистические исследования, существует достаточно сильная корреляция между уровнями загрязнения воздуха и воды и демографическими показателями, в частности численностью населения [2]. Неблагополучная экологическая обстановка влияет на состояние здоровья и продолжительность жизни людей. В работе [3] приводятся

данные, демонстрирующие связь между хроническими заболеваниями и местом проживания: чем выше уровень урбанизации, тем выше заболеваемость, особенно в пожилом возрасте.

По данным Государственного доклада «О состоянии и об охране окружающей среды Российской Федерации в 2010 году»\*, в 136 городах страны (55 % городского населения) уровень загрязнения воздуха характеризуется как высокий или очень высокий. Выбросы загрязняющих веществ в атмосферу в период с 2000 по 2009 гг. увеличились на 11,7 %; к категории загрязненных отнесено 33 % общего объема сточ-

ных вод. В 40 субъектах РФ, где проводятся наблюдения за загрязнением атмосферного воздуха, более 54 % городского населения находится под воздействием высокого загрязнения воздуха. В 10 из этих 40 субъектов воздействию высокого загрязнения воздуха подвержено более 75 % городского населения, в том числе в Москве и Санкт-Петербурге – 100 % населения [4].

Анализ отечественной литературы показывает, что в научных исследованиях мало внимания уделяется экологическим рискам, хотя этот вопрос, в связи со складывающейся в ряде регионов экологической и демографической ситуацией, стано-

\* URL: <http://www.mnr.gov.ru/regulatory/detail.php?ID=128153> (дата обращения: 05.08.2013).

вится все более актуальным. Неблагоприятное изменение окружающей среды — ее загрязнение — является результатом человеческой деятельности. В свою очередь, эти изменения влияют на человека — прямо либо через ресурсы [5]. Для регулирования состояния биосферы нужна информация о ее текущем состоянии и о возможных изменениях в будущем, т. е. необходимы контроль окружающей среды и демографической ситуации урбанизированных территорий, их непрерывных изменений и определение тенденций к изменениям. Отсюда следует целесообразность более тщательного изучения и полного учета влияния экологических факторов на демографическую обстановку в регионах и стране в целом.

Цель настоящей работы — построение математической модели динамики и взаимовлияния численности населения и экологических факторов (загрязнения атмосферы и поверхностных водоемов) на урбанизированной территории. Модель должна базироваться на достаточно простых и фундаментальных положениях, характеризующих взаимозависимость численности населения территории и количества антропогенных загрязняющих веществ; быть универсальной, допускающей ее усложнение путем ввода дополнительных факторов, и единой для различных объектов (население, воздушное и водное пространство).

Модель будет описывать систему, динамика которой определяется следующим:

- в среду, окружающую население территории, поступают загрязняющие вещества, которые производят само население;
- загрязняющие вещества не взаимодействуют между собой и не образуют новое вредное вещество;
- численность населения растет (убывает) вследствие самолимитирования и необратимого влияния на него загрязняющих веществ.

Соотношения математической модели строятся на следующих предположениях. Известно [6], что прирост (убыль) биологической популяции за единицу времени пропорционален первой степени ее численности:

$$\Delta \bar{N} = k \bar{N} \Delta \bar{t}, \quad (1)$$

где  $\Delta \bar{N}$  — приращение численности;  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $\bar{N}$  — численность населения;  $\Delta \bar{t}$  — промежуток времени, за который произошло изменение численности.

Подставляя в правую часть уравнения (1) вместо  $\bar{N}$  произведение  $\bar{N}X(\bar{N})$ , где новая переменная  $X(\bar{N})$  является функцией  $\bar{N}$ , получим сложный рост численности во времени. Переменная  $X$  называется [7] уровнем технологий, пропорциональным численности населения, поскольку ему пропорционально число «изобретателей», совершенствующих технологии. Принимая функцию  $X(\bar{N})$  линейной, т. е.  $X(\bar{N}) = k_A \bar{N}$ , получим абсолютное приращение  $\Delta \bar{N}(\bar{t})$  численности населения территории в идеализированной («стерильной») окружающей среде за промежуток времени  $\Delta \bar{t}$ :

$$\Delta \bar{N}(\bar{t}) = \bar{a} \bar{N}^2(\bar{t}) \Delta \bar{t}, \quad \bar{a} = k k_A, \quad (2)$$

где  $\bar{a}$  — скорость приращения населения, отнесенная к квадрату численности населения, чел./чел<sup>2</sup>·время).

Переходя в уравнении (2) к пределу при  $\Delta \bar{t} \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение для скорости изменения численности населения в момент времени  $\bar{t}$ :

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{t}} = \bar{a} \bar{N}^2(\bar{t}). \quad (3)$$

Введением «мальтузианских» факторов — количества веществ, загрязняющих атмосферу  $\bar{K}(\bar{t})$  и водоемы  $\bar{Z}(\bar{t})$  в данный момент времени  $\bar{t}$ , получим обобщенное уравнение скорости изменения численности населения:

$$\frac{d\bar{N}}{d\bar{t}} = \bar{a} \bar{N}^2(\bar{t}) + \bar{b} \bar{K}(\bar{t}) + \bar{c} \bar{Z}(\bar{t}), \quad (4)$$

где  $\bar{b}$  — скорость приращения населения, вызванного единичным количеством веществ, загрязняющих атмосферу, чел/(т·время);  $\bar{c}$  — скорость приращения населения, вызванного единичным количеством веществ, загрязняющих водоемы, чел/(м<sup>2</sup>·время).

Предполагая, что загрязнения имеют только антропогенное происхождение, когда изменения в объемах загрязнений объясняются изменением численности населения, приращения количества веществ, загрязняющих атмосферу и водоемы

за время  $\Delta \bar{t}$ , принимают соответственно вид:

$$\Delta \bar{K}(\bar{t}) = \bar{d} \bar{N}(\bar{t}) \Delta \bar{t}; \quad (5)$$

$$\Delta \bar{Z}(\bar{t}) = \bar{g} \bar{N}(\bar{t}) \Delta \bar{t}, \quad (6)$$

где  $\bar{d}$  и  $\bar{g}$  — скорости приращений количества веществ, загрязняющих атмосферу и водоемы одним человеком, с размерностями соответственно т/(чел·время) и м<sup>2</sup>/(чел·время).

Переходя к пределам при  $\Delta \bar{t} \rightarrow 0$ , получим соответствующие дифференциальные уравнения для скоростей изменения количества загрязняющих веществ в момент времени  $\bar{t}$ :

$$d\bar{K}/d\bar{t} = \bar{d} \bar{N}(\bar{t}); \quad (7)$$

$$d\bar{Z}/d\bar{t} = \bar{g} \bar{N}(\bar{t}). \quad (8)$$

Таким образом, получена нелинейная математическая модель динамики системы для трех взаимозависящих функций, характеризующих замкнутую урбанизированную территорию. Модель состоит из трех дифференциальных уравнений с рациональными правыми частями и содержит пять параметров  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{d}$ ,  $\bar{g}$ .

Модель позволяет на кинетическом уровне описывать эволюцию численности населения территории и объемов загрязняющих атмосферу и водоемы веществ.

Ввиду того, что в уравнениях (4), (7), (8) суммируются слагаемые разных размерностей, приведем уравнения к безразмерному виду, вводя следующие безразмерные переменные и параметры:

$$t = \frac{\bar{t}}{t_1}; \quad N = \frac{\bar{N}}{N_1}; \quad K = \frac{\bar{K}}{K_1}; \quad Z = \frac{\bar{Z}}{Z_1}; \quad (9)$$

$$a = \bar{a} N_1 t_1; \quad b = \frac{\bar{b} K_1}{N_1} t_1; \quad c = \frac{\bar{c} Z_1}{N_1} t_1;$$

$$d = \frac{\bar{d} N_1}{K_1} t_1; \quad g = \frac{\bar{g} N_1}{Z_1} t_1.$$

Масштаб времени  $t_1$  принимаем равным одному году, тогда каждая единица безразмерного времени  $t$  соответствует фактической продолжительности одного года, т. е.  $t = 1$  означает  $\bar{t} = 1$  год,  $t = n$  соответствует  $\bar{t} = n$  лет. Соответственно  $N_1 = N(1)$ ,  $K_1 = K(1)$ ,  $Z_1 = Z(1)$  — численность населения, количества загрязняющих воздух и водоемы веществ в начальный (первый) год.

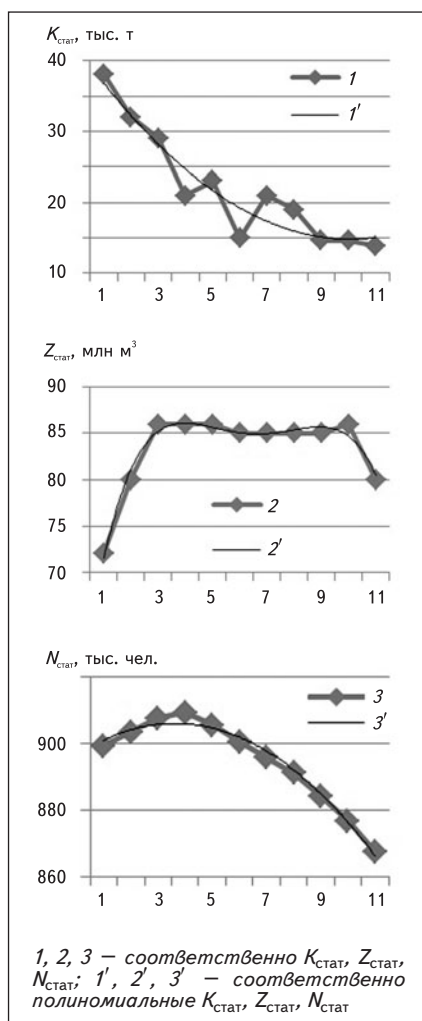


Рис. 1. Линии трендов функции  $N(t)$ ,  $K(t)$ ,  $Z(t)$  за 1992–2002 гг.

Окончательно система уравнений (4), (7), (9) принимает вид:

$$\frac{dN}{dt} = aN^2 + bK + cZ, \quad (10)$$

$$\frac{dK}{dt} = dN, \quad (11)$$

$$\frac{dZ}{dt} = gN. \quad (12)$$

Начальные условия в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$N(1) = 1, \quad K(1) = 1, \quad Z(1) = 1. \quad (13)$$

Далее работа с математической моделью проводится по следующей схеме. На основе анализа статистических данных определяется временной интервал, для которого имеется надежная статистика, выбирается начальный момент времени  $t_1 = 1$  для проведения расчетов и со-

### Статистические данные по Орловской обл. [1]

Год	$t$	$N_{\text{стат}}$ , чел.	$K_{\text{стат}}$ , тыс. т	$Z_{\text{стат}}$ , млн м <sup>3</sup>
1992	1	899207	38	72
1993	2	903489	32	80
1994	3	907552	29	86
1995	4	909379	21	86
1996	5	905510	23	86
1997	6	900489	15	85
1998	7	895703	21	85
1999	8	891035	19	85
2000	9	884269	14,6	85
2001	10	876672	14,6	86
2002	11	867553	13,9	80
2003	12	858312	15	79
2004	13	850016	13,5	68,4
2005	14	842351	12,9	68,5
2006	15	833783	12,3	69,5
2007	16	826588	12	63
2008	17	821934	20	61
2009	18	816895	22	60
2010	19	812000	23	50
2011	20	878000	23	54

ответствующие этому интервалу значения переменных модели. Для выбранного интервала  $t_1 \div t_n$  обработкой соответствующих статистических данных (ППП Excel) строятся аппроксимирующие степенные функции  $N(t)$ ,  $K(t)$ ,  $Z(t)$  (рис. 1). Построенные функции и их производные подставляем в уравнения системы (10)–(12). Параметр  $a$  определяем из упрощенного уравнения (10) в предположении отсутствия загрязнений  $K(t) = Z(t) = 0$ . Минимизируя невязку

$$R_1(t) = aN^2(t) - \frac{dN}{dt},$$

получаем  $a = -0,006$ .

Затем путем минимизации невязки:

$$R_1(t) = -0,006^2(t) + bK(t) + cZ(t) - \frac{dN}{dt};$$

$$R_2(t) = dN(t) - \frac{dK}{dt};$$

$$R_3(t) = gN(t) - \frac{dZ}{dt}$$

определяем остальные параметры модели  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $g$ .

Таким образом, на данном этапе путем решения обратной задачи с использованием статистических данных на некотором временном интервале определяются параметры модели. Далее решается прямая задача определения функций  $N(t)$ ,  $K(t)$ ,  $Z(t)$  на прогнозный период при найденных значениях параметров модели с использованием в качестве начальных условий процесса значений функций в конце первого интервала  $N(t_n)$ ,  $K(t_n)$ ,  $Z(t_n)$ .

Разработанная модель апробирована на примере Орловской обл. для расчета динамики численности населения и количества загрязняющих веществ с использованием статистических данных за 20-летний период (1992–2011 гг.). В таблице содержатся данные по населению, выбросам загрязняющих атмосферу веществ, отходящих от стационарных источников. Сброс загрязненных сточных вод в поверхностные

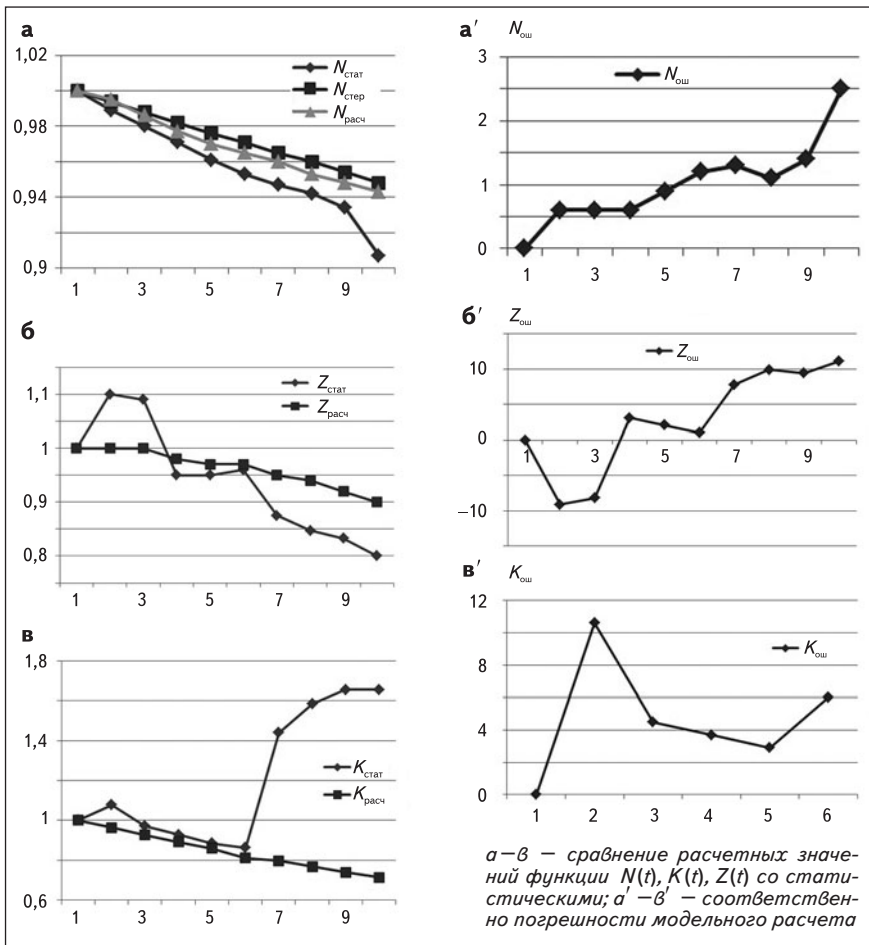


Рис. 2. Динамика населения (а), выбросов загрязнений в водоемы (б) и загрязнений атмосферного воздуха (в) в Орловской обл. в 2002–2011 гг.

водные объекты косвенно характеризует загрязнение питьевой воды в местах проживания.

Параметры модели  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $g$  определяются на основе первых фактических 11-летних данных (1992–2002 гг.). Для этого средствами Excel строятся тренды факторов  $N(t)$ ,  $K(t)$ ,  $Z(t)$ . На рис. 1 показаны поля корреляции, соответствующие линии и уравнения трендов, а также величины достоверности аппроксимации. Коэффициенты уравнений на рис. 1 получены в размерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{N}(\bar{t}) &= -731,64\bar{t}^2 + 5308\bar{t} + 896431; \\ \bar{K}(\bar{t}) &= 0,2663\bar{t}^2 - 5,3713\bar{t} + 41,895; \\ \bar{Z}(\bar{t}) &= -0,0253\bar{t}^4 + 0,6595\bar{t}^3 - \\ &\quad - 6,1227\bar{t}^2 + 23,768\bar{t} + 53,273. \end{aligned}$$

Соответственно уравнения с безразмерными переменными и константами принимают вид:

$$\begin{aligned} N(t) &= -0,00087t^2 + 0,0064t + 0,996; \\ N'(t) &= -0,00174t + 0,0064; \\ K(t) &= 0,007t^2 - 1,141t + 1,102; \\ K'(t) &= 0,014t - 1,141; \\ Z(t) &= -0,00035t^4 + 0,009t^3 - \\ &\quad - 0,085t^2 + 0,33t + 0,74; \\ Z'(t) &= -0,0014t^3 + 0,027t^2 - \\ &\quad - 0,17t + 0,33. \end{aligned}$$

Далее с помощью программы Maple путем решения обратной задачи определяются коэффициенты дифференциальных уравнений (10)–(12) на 11-летнем временном интервале:

$$\begin{aligned} a &= -0,006; b = 0,0003; c = 0,0002; \\ d &= -0,0064; g = -0,038. \end{aligned}$$

Подстановкой полученных коэффициентов в уравнения (10)–(12)

решается прямая задача на следующий, якобы прогнозный период (с 2002 по 2011 гг.). В качестве начальных условий используются данные за 2002 г. ( $t = 11$ ).

На рис. 2а приведены графики следующих функций:

- $N_{\text{стат}}(t)$  – результат обработки статистических данных по населению области за рассматриваемый («прогнозный») промежуток времени (2002–2011 гг.);
- $N_{\text{расч}}(t)$  – результаты решения системы уравнений модели (10)–(12);
- $N_{\text{стер}}(t)$  – решение уравнения (4), без учета влияния загрязнений, т. е. при  $b = c = 0$ . Эта функция характеризует динамику численности населения в «стерильной» окружающей среде.

На рис. 2а' показаны величины погрешностей, которые составляют «прогнозные» данные, полученные расчетом по модели (10)–(12), с фактическими данными за «прогнозный» период (2002–2011 гг.):

$$N_{\text{расч.от}} = \frac{N_{\text{расч}} - N_{\text{стат}}}{N_{\text{стат}}} 100 \%$$

Расчетный тренд  $N_{\text{расч}}(t)$  прогнозирует монотонную убыль населения, что соответствует известным статистическим данным. Количественно расчет дает прогноз достаточно высокой точности. Так, максимальная погрешность расчета составляет 2,5 %, погрешность по модулю растет монотонно по мере дальности прогноза. Сравнение графиков  $N_{\text{расч}}$  и  $N_{\text{стер}}$  показывает, что учет загрязнений при анализе динамики численности населения оправдан.

На рис. 2б изображены графики функций:  $Z_{\text{стат}}(t)$  – результат обработки статистических данных по выбросам загрязнений в водоемы за «прогнозный» промежуток времени (2002–2011 гг.) и  $Z_{\text{расч}}(t)$  – результаты решения системы уравнений модели (10)–(12). Фактические величины фактора  $Z_{\text{стат}}(t)$  со временем убывают, осциллируя около параболической кривой (см. рис. 2в). Расчетный тренд также убывает по параболе, но с несколько меньшей скоростью, что отражается на погрешности расчета:

$$Z_{\text{от}} = \frac{Z_{\text{расч}} - Z_{\text{стат}}}{Z_{\text{стат}}} 100 \%$$



график изменения которой показан на рис. 2б'.

Погрешность, как и график фактических данных, осциллирует около параболической кривой, изменяясь во времени с отрицательных значений до положительных (max 10 %).

Более сложная картина наблюдается при анализе изменения функции  $K(t)$ , характеризующей загрязнение атмосферного воздуха в Орловской обл. (рис. 2б). Обработка статистических данных показывает достаточно плавный убывающий тренд с 2002 г. по 2007 г., почти двукратный (с 12 тыс. т до 20 тыс. т) всплеск в 2007–2008 гг. и тенденцию к убыванию с 2008 г. до 2011 г.

Расчетный тренд (рис. 2б) показывает монотонное убывание за весь период 2002–2011 гг. по параболической кривой, достаточно близкой к статистической (max погрешность 11%, рис. 2б') в течение первых шести лет. Далее модель дает неверные результаты, не реагируя на имевший место всплеск изучаемого фактора.

## Выводы

1. В работе предложен метод прогнозирования эколого-демографической ситуации урбанизированной территории с помощью относительно простой нелинейной имитационной модели, отражающей взаимодействие нескольких подсистем (население, загрязнение атмосферы и водоемов) урбанизированной территории.

2. Модель требует задания пяти параметров, определяющих скорость изменения изучаемых факторов, и начальных значений этих факторов. Показана процедура определения численных значений параметров модели с использованием статистических данных по исследуемым факторам за определенный промежуток времени.

3. Построенная модель позволяет воспроизвести наблюдаемые тренды численности населения и объемов загрязняющих веществ закрытой урбанизированной территории и сделать достаточно надежный 5-, 10-летний прогноз ожидаемых тенденций изменения этих факторов и

их численных значений. Работоспособность модели апробирована на конкретных данных по Орловской обл. Параметры модели рассчитывались по данным за 11-летний период (1992–2002 гг.). «Прогноз» делался на следующие 10 лет (2002–2011 гг.). Результаты «прогнозирования» сравнивались с известными статистическими данными за эти же годы.

4. Недостатком модели следует считать принимаемые однородность населения, «обезличенность» загрязнений и относительно высокую погрешность при долгосрочных прогнозах. Дальнейшее ее развитие предполагается в направлении дифференцированного распределения скоростей приращений населения по возрастным группам и социальному статусу, дифференцированной оценки состояния окружающей среды, а также использования в рассматриваемых уравнениях скорректированных в конце каждого более короткого интервала времени параметров рассматриваемой динамической модели.

## REFERENCES

1. Регионы России. Социально-экономические показатели 2012 г. М. : Росстат, 2012. 990 с.
2. Ильичёв В. А., Колчунов В. И., Гордон В. А. Методика прогнозирования показателей биосферосовместимости урбанизированных территорий // Градостроительство. 2010. № 1. С. 37–43.
3. Беспалова Д. Н., Рощина Я. М. Состояние здоровья населения России // Вестник Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ. М. : НИУ ВШЭ, 2011. С. 131–143. [Электронный ресурс]. URL: [www.hse.ru/data/2011/06/27/1215374948/vestnik\\_rlms-hse\\_2011.pdf](http://www.hse.ru/data/2011/06/27/1215374948/vestnik_rlms-hse_2011.pdf) (дата обращения: 19.08.2013).
4. Вега А. Ю., Богомолов С. В. Экологическая и социальная составляющая качества жизни населения: теоретические аспекты // Качество и уровень жизни населения в современной России: состояние, тенденции и перспективы. М. : ООО «М-Студио», 2012. С. 45–53.
5. Ильичёв В. А. Принципы преобразования города в биосферосовместимый и развивающий человека // Промышленное и гражданское строительство. 2010. № 6. С. 3–13.
6. Словохотов Ю. Л. Аналоги фазовых переходов в экономике и демографии // Компьютерные исследования и моделирование. 2010. Т. 2. № 2. С. 209–218.
7. Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурин Д. А. Компактная математическая макро модель технико-экономического и демографического роста Мир-системы // История и синергетика: математическое моделирование социальной динамики. М. : Комкнига, 2005. С. 46–48.
1. *Regiony Rossii. Sotsial'no-ekonomicheskie pokazateli 2012 g.* Moscow, Rosstat Publ., 2012. 990 p. (In Russian).
2. Il'ichev V. A., Kolchunov V. I., Gordon V. A. Metodika prognozirovaniya pokazateley biosferosovmestimosti urbanizirovannykh territoriy. *Gradostroitel'stvo*, 2010, no. 1, pp. 37–43. (In Russian).
3. Bepalova D. N., Roshchina Ya. M. Sostoyanie zdorov'ya naseleniya Rossii. *Vestnik Rossiyskogo monitoringa ekonomicheskogo polozheniya i zdorov'ya naseleniya NIU VShE*. M. : NIU VShE, 2011, pp. 131–143. [Elektronnyy resurs]. URL: [www.hse.ru/data/2011/06/27/1215374948/vestnik\\_rlms-hse\\_2011.pdf](http://www.hse.ru/data/2011/06/27/1215374948/vestnik_rlms-hse_2011.pdf) (accessed 19.08.2013).
4. Vega A. Yu., Bogomolov S. V. Ekologicheskaya i sotsial'naya sostavlyayushchaya kachestva zhizni naseleniya: teoreticheskie aspekty. *Kachestvo i uroven' zhizni naseleniya v sovremennoy Rossii: sostoyanie, tendentsii i perspektivy*. Moscow, OOO «M-Studio» Publ., 2012, pp. 45–53. (In Russian).
5. Il'ichev V. A. Printsipy preobrazovaniya goroda v biosferosovmestimyy i razvivayushchiy cheloveka. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*, 2010, no. 6, pp. 3–13. (In Russian).
6. Slovoxotov Yu. L. Analogi fazovykh perekhodov v ekonomike i demografii. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, 2010, vol. 2, no. 2, pp. 209–218. (In Russian).
7. Korotaev A. V., Malkov A. S., Khalturin D. A. Kompaktnaya matematicheskaya makromodel' tekhniko-ekonomicheskogo i demograficheskogo rosta Mir-sistemy. *Istoriya i sinergetika: matematicheskoe modelirovanie sotsial'noy dinamiki*. Moscow : Komkniga Publ., 2005, pp. 46–48. (In Russian). ■